STJEPAN ŠKREBLIN

ARITMETIKA I ALGEBRA

ZA

ŠESTI RAZRED REALNIH I KLASIČNIH GIMNAZIJA



ZAGREB 1941

ARITMETIKA I ALGEBRA

ZA

ŠESTI RAZRED REALNIH I KLASIČNIH GIMNAZIJA

PREMA NOVOM
NASTAVNOM PROGRAMU SASTAVIO
STJEPAN ŠKREBLIN
profesor II. klas. gimn. u Zagrebu

OVA JE KNJIGA ODOBRENA KAO PRIVREMENA ŠKOLSKA KNJIGA ODLUKOM BANA BANOVINE HRVATSKE BR. 40733-II-1940. OD 17. SRPNJA 1940.

Ova je knjiga odobrena kao privremena školska knjiga rješenjem ministarstva nastave Nezavisne Države Hrvatske br. [illegible]-1941 od [illegible]. srpnja 1941.

ZAGREB 1941

IZDANJE NAKLADNOGA ZAVODA BANOVINE HRVATSKE

Tisak
Zaklade Tiskare
Narodnih Novina - Zagreb

SADRŽAJ

I. POGLAVLJE

Računske operacije s iracionalnim i imaginarnim brojevima. Računanje s približnim vrijednostima.

II. POGLAVLJE

Kvadratne jednadžbe s 1 nepoznanicom. Sistem od kvadratne i linearne jednadžbe s 2 nepoznanice. Problemi drugog stepena.

III. POGLAVLJE

Logaritmi

I. Poglavlje

Računske operacije s iracionalnim i imaginarnim brojevima. Računanje s približnim vrijednostima.

§ 1. Iracionalni brojevi. Kod izračunavanja n-tog (n cio pozitivan broj) korijena iz cijelog pozitivnog broja a treba da razlikujemo 2 slučaja:

1. Radikand a jest n-ta potencija nekog cijelog broja b, $a = b^n$. Tad je i $\sqrt[n]{a}$ jednak cijelom broju b.

Na pr. $\sqrt[3]{64} = 4$, jer je $64 = 4^3$.

2. Radikand a nije n-ta potencija nekog cijelog broja b, pa je zato on sadržan između dviju susjednih n-tih potencija od b t. j. $b^n < a < (b+1)^n$. Tad je $b < \sqrt[n]{a} < b + 1$, pa $\sqrt[n]{a}$ ne može biti cio broj; $\sqrt[n]{a}$ ne može biti jednak nikakovom običnom razlomku, jer kad bi bilo $\sqrt[n]{a} = \frac{p}{q}$ (p, q rel. prosti), moralo bi biti $a = \frac{p^n}{p^n}$. Ova pak jednadžba ne može postojati zato, jer su i p^n i q^n relativno prosti, pa $\frac{p^n}{q^n}$ nije cio broj. $\sqrt[n]{a}$ ne može biti jednak ni (beskonačnom) periodskom decimalnom razlomku; kad bi to bilo, mogao bi se taj (beskonačni) periodski decimalni razlomak pretvoriti u obični razlomak, ali $\sqrt[n]{a}$ prema pređašnjem ne može biti jednak nijednom običnom razlomku. Kako se cijeli i razlomljeni brojevi bili oni pozitivni ili negativni zovu jednim imenom *racionalni* brojevi, možemo reći:

Ako cio pozitivan broj a nije n-ta potencija nekog cijelog broja, $\sqrt[n]{a}$ nije racionalan broj.

Ali kakogod $\sqrt[n]{a}$ u slučaju 2) ne može biti jednak nikakvom racionalnom broju, ipak se on može staviti između takva 2 racionalna broja, da je jedan od njih veći od $\sqrt[n]{a}$, drugi manji od njega, a razlika između oba racionalna broja može se učiniti po volji malena.

Uzmimo na pr. da treba naći broj, kojemu je kvadrat 2 ili odrediti $\sqrt{2}$. Broj 2 nije druga potencija nijednog cijelog broja, ali je

$$1^2 < 2 < 2^2 \quad \text{ili} \quad 1 < \sqrt{2} < 2.$$

Vrijednost $\sqrt{2}$ nalazi se dakle između 1 i 2. No brojevi, između kojih se nalazi $\sqrt{2}$, mogu se tako približiti jedan drugome, da bude njihova razlika tako malena kakogod hoćemo. U tu svrhu razmatrajmo kvadrate ovih brojeva:

1; 1·1; 1·2; 1·3; 1·4; . . . 1·9; 2 t. j. brojeve
1; 1·21; 1·44; 1·69; 1·96; . . . 3·61; 4. Nalazimo

$$1{\cdot}96 < 2 < 2{\cdot}25 \quad \text{ili} \quad 1{\cdot}4^2 < 2 < 1{\cdot}5^2 \text{ t. j.}$$

$$1{\cdot}4 < \sqrt{2} < 1{\cdot}5.$$

Sad opet treba da razmatramo kvadrate ovih brojeva:

1·4; 1·41; 1·42; . . . 1·49 1·5 t. j. brojeve
1·96; 1·9881; 2·0164; . . . 2·2201; 2·25. Nalazimo

$$1{\cdot}9881 < 2 < 2{\cdot}0164 \quad \text{ili} \quad 1{\cdot}41^2 < 2 < 1{\cdot}42^2 \text{ t. j.}$$

$$1{\cdot}41 < \sqrt{2} < 1{\cdot}42.$$

Produžujući taj postupak dolazimo do ovog niza nejednadžbi:

$$1{\cdot}414 < \sqrt{2} < 1{\cdot}415,$$
$$1{\cdot}4142 < \sqrt{2} < 1{\cdot}4143,$$
$$1{\cdot}41421 < \sqrt{2} < 1{\cdot}41422,$$
$$1{\cdot}414213 < \sqrt{2} < 1{\cdot}414214,$$
$$1{\cdot}4142136 < \sqrt{2} < 1{\cdot}4142137.$$

Iz tih nejednadžbi možemo sastaviti ovaj dvostruki niz racionalnih brojeva, koji se nikad ne svršava, a možemo mu odrediti toliko članova kolikogod hoćemo:

$$\begin{pmatrix} 1{\cdot}4; & 1{\cdot}41; & 1{\cdot}414; & 1{\cdot}4142; & 1{\cdot}41421; & 1{\cdot}414213; \ldots \\ 1{\cdot}5; & 1{\cdot}42; & 1{\cdot}415; & 1{\cdot}4143; & 1{\cdot}41422; & 1{\cdot}414214; \ldots \end{pmatrix}$$

Taj dvostruki niz ima ova svojstva:

U prvom dijelu dvostrukog niza svaki je član veći od prethodnoga ili mu može biti i jednak[1]; u drugom je dijelu svaki član manji od prethodnoga ili mu može biti i jednak[2]). Bilo koji član drugog dijela veći je od bilo kojeg člana prvog dijela; a razlika korespondentnih članova obaju dijelova, koja iznosi jednu jedinicu posljednjeg mjesta, postaje, što je broj decimalnih mjesta tih članova veći, sve manja i manja i napokon može postati po volji malena.

Kažemo, da oba dijela gornjeg dvostrukog niza *konvergiraju* jedan prema drugome. Budući da se $\sqrt{2}$ nalazi uvijek između pripadnih

[1]) Ako je zadnja znamenka tog člana jednaka nuli.
[2]) Ako je zadnja znamenka pripadnog člana prvog dijela 9.

članova obaju dijelova, to je $\sqrt{2}$ *zajednička granica* obaju dijelova gornjeg dvostrukog niza, kojoj se sve više i više približavaju brojevi prvog dijela rastući a brojevi drugog dijela padajući.

Na posve sličan način dobivamo za $\sqrt[3]{4}$ ovaj dvostruki niz racionalnih brojeva:

$$\begin{pmatrix} 1{\cdot}5; & 1{\cdot}58; & 1{\cdot}587; & 1{\cdot}5874; & 1{\cdot}58740; \ldots \\ 1{\cdot}6; & 1{\cdot}59; & 1{\cdot}588; & 1{\cdot}5875; & 1{\cdot}58741; \ldots \end{pmatrix}$$

Ali ima i dvostrukih nizova, koji imaju gore istaknuta svojstva, a zajednička granica obaju njihovih dijelova jest racionalan broj. Razmatrajmo na pr. ovaj dvostruki niz, gdje se u prvom dijelu znamenka 3 neprestano ponavlja

$$\begin{pmatrix} 0{\cdot}3; & 0{\cdot}33; & 0{\cdot}333; \ldots \\ 0{\cdot}4; & 0{\cdot}34; & 0{\cdot}334; \ldots \end{pmatrix}$$

Brojevi prvog dijela približavaju se granici $\frac{1}{3}$ rastući, a brojevi drugog dijela istoj toj granici padajući.

Taj dvostruki niz znači dakle racionalan broj $\frac{1}{3}$.

Zato možemo reći:

Broj, koji sam nije racionalan, ali je zajednička granica obaju dijelova dvostrukog niza racionalnih brojeva, koji konvergiraju jedan prema drugome, zove se iracionalan broj.

Razmatrat ćemo sad općeno dvostruke nizove racionalnih brojeva, koji određuju bilo koji racionalni ili iracionalni broj i označivati ih ovako:

$$\begin{pmatrix} a_1; & a_2; & \ldots & a_n; & \ldots \\ A_1; & A_2; & \ldots & A_n; & \ldots \end{pmatrix} \text{ ili kraće s } (a_n;\ A_n).$$

Brojevi a_n, A_n moraju udovoljavati ovim uvjetima:

1) $a_n \leq a_{n+1} < A_{n+1} \leq A_n$,

2) $A_n - a_n < \varepsilon$ (ε znači po volji malen pozitivan broj).

Prvi nam uvjet kazuje, da je u prvom dijelu dvostrukog niza svaki član veći od prethodnoga ili mu je jednak. U drugom dijelu da je svaki član manji od prethodnoga ili mu je jednak, a osim toga da je bilo koji član drugog dijela veći od bilo kojeg člana prvog dijela; drugi nam uvjet kazuje, da se razlika korespondentnih članova obaju dijelova, kad se n uzme dosta veliko, može učiniti po volji malena.

Ako je zajednička granica obaju dijelova dvostrukog niza racionalan broj a, onda je još za sve vrijednosti od n ispunjen ovaj uvjet:

3) $$a_n < a < A_n.$$

Kao primjer gledaj dvostruki niz, koji određuje racionalan broj $\frac{1}{3}$.

Sad treba da odredimo, kako ćemo *ispoređivati* iracionalne brojeve s racionalnim i s drugim iracionalnim brojevima. Isporedimo najprije po-

*

voljni racionalni broj r s racionalnim brojem a određenim dvostrukim nizom $a=(a_n;\ A_n)$. Racionalni broj r manji je od racionalnog broja a, kad je r manje od svih a_n počevši od određene vrijednosti za n; r je veće od a, kad je r veće od svih A_n počevši od određene vrijednosti za n; $r=a$, kad je za sve vrijednosti od n istodobno ispunjen uvjet $r > a_n$, $r < A_n$.

Ako nam a znači dvostruki niz, koji predočuje racionalni broj $\frac{1}{3}$ i ako je na pr. $r = 0{\cdot}33331$, to je $r < a$, jer je $r < 0{\cdot}33333$; ako je pak $r = 0{\cdot}333336$, to je $r > a$, jer je $r > 0{\cdot}333334$.

Slično će se isporediti iracionalni broj α s racionalnim brojem r i s drugim iracionalnim brojem β.

Racionalni broj r manji je od iracionalnog broja $\alpha = (a_n;\ A_n)$, ako je r manje negoli svi a_n počevši od neke određene vrijednosti od n; racionalni broj r veći je od iracionalnog broja α, ako je r veći od svih A_n počevši od neke određene vrijednosti za n.

Iracionalni broj $\alpha = (a_n;\ A_n)$ jednak je iracionalnom broju $\beta = (b_n;\ B_n)$, kad je svaki racionalni broj, koji je manji (odnosno veći) od α ujedno manji (odnosno veći) od β i kad je svaki racionalni broj, koji je manji (odnosno veći) od β ujedno manji (odnosno veći) od α, ili s drugim riječima, kad nema racionalnog broja, koji je bio manji od jednog a veći od drugog iracionalnog broja.

Iracionalni broj α veći je od iracionalnog broja β, ako egzistira racionalni broj r, koji je veći od β i istodobno manji od α, t. j. ako je $r > \beta$ i $r < \alpha$.

Time su iracionalni brojevi svedeni u određeni sistem i između sebe i prema racionalnim brojevima. Racionalni i iracionalni brojevi zovu se jednim imenom *realni* brojevi. Svaki se realni broj može napisati u obliku dvostrukog niza.

Gornje definicije za ispoređivanje iracionalnih brojeva s racionalnim i drugim iracionalnim brojevima razumijet će se bez daljnjega, ako se iracionalni brojevi predoče na brojnoj crti (vidi § 3.).

Isti racionalni broj može se predočiti s više dvostrukih nizova, kojima su članovi među sobom različiti. Međutim dade se pokazati, da se svaki iracionalni broj može napisati u obliku jednog jedinog dvostrukog niza takovog, gdje su članovi decimalni brojevi, svaki član sadrži jedno mjesto više od prethodnoga, a razlika korespondentnih članova obaju dijelova dvostrukog niza iznosi jednu jedinicu posljednjeg mjesta. U tom smo obliku napisali dvostruki niz za $\sqrt{2}$ i za $\sqrt[3]{4}$ i taj oblik jedini za $\sqrt{2}$ odnosno za $\sqrt[3]{4}$.

Ako su iracionalni brojevi zadani u tom specijalnom obliku, možemo odmah odrediti, da li su oni jednaki i ako su nejednaki, koji

je manji i koji je veći. Iracionalni broj α bit će jednak iracionalnom broju β, ako je svako a_n jednako pripadnom b_n; α jest manje od β, ako je za jednu vrijednost od n, $a_n < b_n$.

§ 2. Računske operacije s iracionalnim brojevima. Izvoditi računske operacije s iracionalnim brojevima znači određivati s pomoću korespondentnih operacija s članovima dvostrukih nizova, koji određuju zadane iracionalne brojeve, nove dvostruke nizove, kojima opet oba dijela konvergiraju jedan prema drugome. Tako će na pr. *zbroj* iracionalnih brojeva

$$\alpha = (a_n;\ A_n), \qquad \beta = (b_n;\ B_n)$$

biti određen ovim dvostrukim nizom

$\alpha + \beta = (a_n + b_n;\ A_n + B_n)$. Taj dvostruki niz znači zato određeni broj, jer zbog

$$a_n \leq a_{n+1} < A_{n+1} \leq A_n,$$
$$b_n \leq b_{n+1} < B_{n+1} \leq B_n \text{ izlazi}$$
$$a_n + b_n \leq a_{n+1} + b_{n+1} < A_{n+1} + B_{n+1} \leq A_n + B_n$$

i ujedno razlika

$A_n + B_n - (a_n + b_n) = (A_n - a_n) + (B_n - b_n)$ postaje manja, kad n raste, od bilo kako mu drago malenog pozitivnog broja, jer $A_n - a_n$ kao i $B_n - b_n$ postaju, kad n raste, po volji maleni.

Na pr. zbroj iracionalnih brojeva $\sqrt[3]{4} + \sqrt{2}$ određen je ovim dvostrukim nizom:

$$\begin{pmatrix} 1{\cdot}5 + 1{\cdot}4; & 1{\cdot}58 + 1{\cdot}41; & 1{\cdot}587 + 1{\cdot}414; & 1{\cdot}5874 + 1{\cdot}4142; & \ldots \\ 1{\cdot}6 + 1{\cdot}5; & 1{\cdot}59 + 1{\cdot}42; & 1{\cdot}588 + 1{\cdot}415; & 1{\cdot}5875 + 1{\cdot}4143; & \ldots \end{pmatrix}$$

$$\text{ili } \begin{pmatrix} 2{\cdot}9; & 2{\cdot}99; & 3{\cdot}001; & 3{\cdot}0016; & \ldots \\ 3{\cdot}1; & 3{\cdot}01; & 3{\cdot}003; & 3{\cdot}0018; & \ldots \end{pmatrix}.$$

Ovaj se zbroj može još ovako pisati:

$$\begin{pmatrix} 3{\cdot}0; & 3{\cdot}00; & 3{\cdot}001; & \ldots \\ 3{\cdot}1; & 3{\cdot}01; & 3{\cdot}002; & \ldots \end{pmatrix}.$$

Sad je razlika korespondentnih članova obaju dijelova dvostrukog niza jednaka jednoj jedinici posljednjeg decimalnog mjesta.

Omjer između opsega i promjera kruga, koji se označuje slovom π, također je iracionalan broj. On je predočem dvostrukim nizom

$$\pi = \begin{pmatrix} 3{\cdot}1; & 3{\cdot}14; & 3{\cdot}141; & 3{\cdot}1415; & 3{\cdot}14159; & \ldots \\ 3{\cdot}2; & 3{\cdot}15; & 3{\cdot}142; & 3{\cdot}1416; & 3{\cdot}14160; & \ldots \end{pmatrix}.$$

Zato je

$$\pi + \sqrt{2} = \begin{pmatrix} 4{\cdot}5; & 4{\cdot}55; & 4{\cdot}555; & 4{\cdot}5557; & \ldots \\ 4{\cdot}7; & 4{\cdot}57; & 4{\cdot}557; & 4{\cdot}5559; & \ldots \end{pmatrix}.$$

I taj se zbroj može lako tako napisati, da bude razlika korespondentnih članova obaju dijelova dvostrukog niza jednaka jednoj jedinici posljednjeg decimalnog mjesta.

Analogno kao zbroj od 2 iracionalna broja određuje se zbroj od više iracionalnih brojeva ili također zbroj od racionalnih i iracionalnih brojeva. Budući da komutativni i asocijativni zakon vrijede za članove dvostrukih nizova, koji određuju iracionalne brojeve, vrijedit će oni i za same iracionalne brojeve.

Razlika δ iracionalnih brojeva $\alpha = (a_n;\ A_n)$, $\beta = (b_n;\ B_n)$, određena je ovim dvostrukim nizom

$$\delta = (a_n - B_n;\ A_n - b_n).$$

Taj dvostruki niz znači određeni broj zato, jer zbog

$$a_n \leq a_{n+1} < A_{n+1} \leq A_n,$$
$$B_n \geq B_{n+1} > b_{n+1} \geq b_n \text{ izlazi}$$

$a_n - B_n \leq a_{n+1} - B_{n+1} < A_{n+1} - b_{n+1} \leq A_n - b_n$ i razlika $A_n - B_n - (a_n - B_n) = (A_n - a_n) + (B_n - b_n)$ može se uz dovoljno veliko n učiniti po volji malena.

Lako se može razabrati, da δ pribrojeno suptrahendu β daje za zbroj α.

Tako nam na pr. razliku iracionalnih brojeva $\sqrt[3]{4}$ i $\sqrt{2}$ daje dvostruki niz:

$$\begin{pmatrix} 1{\cdot}5-1{\cdot}5; & 1{\cdot}58-1{\cdot}42; & 1{\cdot}587-1{\cdot}415; & 1{\cdot}5874-1{\cdot}4143; & \ldots \\ 1{\cdot}6-1{\cdot}4; & 1{\cdot}59-1{\cdot}41; & 1{\cdot}558-1{\cdot}414; & 1{\cdot}5875-1{\cdot}4142; & \ldots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0; & 0{\cdot}16; & 0{\cdot}172; & 0{\cdot}1731; & \ldots \\ 0{\cdot}2; & 0{\cdot}18; & 0{\cdot}174; & 0{\cdot}1733; & \ldots \end{pmatrix}.$$

Produkt pozitivnih iracionalnih brojeva $\alpha = (a_n;\ A_n)$ i $\beta = (b_n;\ B_n)$, od kojih su oba manja od nekog određenog racionalnog broja r, definiran je ovim dvostrukim nizom;

$\alpha\beta = (a_n b_n;\ A_n B_n)$. I taj dvostruki niz znači određeni broj, jer iz

$$a_n \leq a_{n+1} < A_{n+1} \leq A_n,$$
$$b_n \leq b_{n+1} < B_{n+1} \leq B_n \text{ izlazi}$$
$$a_n b_n \leq a_{n+1} b_{n+1} < A_{n+1} B_{n+1} \leq A_n B_n \text{ i ujedno je}$$
$$A_n B_n - a_n b_n = (A_n - a_n) B_n + (B_n - b_n) a_n.$$

Budući da je $a_n < r$ i za dovoljno velike vrijednosti od n također $B_n < r$, to je

$$A_n B_n - a_n b_n < r\,[(A_n - a_n) + (B_n - b_n)].$$

Kad n sve jače raste, može se desna strana a prema tomu i lijeva strana učiniti po volji malena.

Dvostruki niz, koji određuje produkt iracionalnih brojeva $\sqrt[3]{4}$ i $\sqrt{2}$ bit će

$$\begin{pmatrix} 1{\cdot}5 \cdot 1{\cdot}4; & 1{\cdot}58 \cdot 1{\cdot}41; & 1{\cdot}587 \cdot 1{\cdot}414; & 1{\cdot}5874 \cdot 1{\cdot}4142; & \ldots \\ 1{\cdot}6 \cdot 1{\cdot}5; & 1{\cdot}59 \cdot 1{\cdot}42; & 1{\cdot}588 \cdot 1{\cdot}415; & 1{\cdot}5875 \cdot 1{\cdot}4143; & \ldots \end{pmatrix}$$

$$\text{ili} \begin{pmatrix} 2{\cdot}1; & 2{\cdot}2278; & 2{\cdot}244018; & 2{\cdot}24490108; & \ldots \\ 2{\cdot}4; & 2{\cdot}2578; & 2{\cdot}247020; & 2{\cdot}24520125; & \ldots \end{pmatrix}.$$

Analogno kao umnožak od 2 iracionalna broja određuje se umnožak od više iracionalnih brojeva ili također umnožak od racionalnih i iracionalnih brojeva. Budući da komutativni i asocijativni zakon vrijede za članove dvostrukih nizova, koji određuju iracionalne brojeve, vrijedit će oni i za same iracionalne brojeve.

Kvocijent pozitivnih iracionalnih brojeva $\alpha = (a_n;\ A_n)$ i $\beta = (b_n;\ B_n)$, od kojih je α manje od pozitivnog racionalnog broja r, a β veće od pozitivnog racionalnog broja r', definiran je dvostrukim nizom:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{a_n}{B_n};\ \frac{A_n}{b_n}\right)$$

Taj dvostruki niz znači određeni broj, jer iz

$$a_n \leq a_{n+1} < A_{n+1} \leq A_n,$$
$$B_n \geq B_{n+1} > b_{n+1} \geq b_n \text{ izlazi}$$
$$\frac{a_n}{B_n} \leq \frac{a_{n+1}}{B_{n+1}} < \frac{A_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{A_n}{b_n};\ \text{osim toga razlika}$$
$$\frac{A_n}{b_n} - \frac{a_n}{B_n} = \frac{A_n B_n - a_n b_n}{B_n b_n} = \frac{(A_n - a_n) B_n + (B_n - b_n) a_n}{B_n b_n},$$

može se, ako se n uzme dosta veliko, učiniti po volji malena, jer se brojnik može učiniti tako malen kakogod hoćemo, a nazivnik uz dovoljno velike vrijednosti od n ostaje veći od r'^2.

Lako se može razabrati, da kvocijent $\left(\frac{a_n}{B_n};\ \frac{A_n}{b_n}\right)$ pomnožen s divizorom $(b_n;\ B_n)$ doista daje za produkt $(a_n;\ A_n)$.

Tako nam na pr. kvocijent iracionalnih brojeva $\sqrt[3]{4}$ i $\sqrt{2}$ predočuje ovaj dvostruki niz

$$\begin{pmatrix} \frac{1{\cdot}5}{1{\cdot}5}; & \frac{1{\cdot}58}{1{\cdot}42}; & \frac{1{\cdot}587}{1{\cdot}415}; & \frac{1{\cdot}5874}{1{\cdot}4143}; & \ldots \\ \frac{1{\cdot}6}{1{\cdot}4}; & \frac{1{\cdot}59}{1{\cdot}41}; & \frac{1{\cdot}588}{1{\cdot}414}; & \frac{1{\cdot}5875}{1{\cdot}4142}; & \ldots \end{pmatrix}$$

ili

$$\begin{pmatrix} \frac{15}{15}; & \frac{158}{142}; & \frac{1587}{1415}; & \frac{15874}{14143}; & \ldots \\ \frac{16}{14}; & \frac{159}{141}; & \frac{1588}{1414}; & \frac{15875}{14142}; & \ldots \end{pmatrix}.$$

Svaki se negativni iracionalni broj $\mu = (m_n;\ M_n)$ može napisati i u obliku

$$-(-M_n;\ -m_n),\ \text{gdje je}\ (-M_n;\ -m_n) > 0.$$

Napiši u tom obliku dvostruki niz za $-\sqrt{2}$!

Time je i računanje s negativnim iracionalnim brojevima određeno istim onim definicijama, koje su bile postavljene za cijele brojeve.

Uzmemo li mjesto zadanog iracionalnog broja kojigod član u dvostrukom nizu racionalnih brojeva, koji određuje taj iracionalni broj, dobivamo *približnu vrijednost* tog iracionalnog broja. Tako su na pr. približne vrijednosti od $\sqrt{2}$ ove: 1·4; 1·41; 1·414; . . . ili također 1·5; 1·42; 1·415; . . . Ako je dvostruki niz napisan u ovom specijalnom obliku, u kojem smo na pr. napisali $\sqrt{2}$, onda je granica pogrješke približne vrijednosti, ako se ona sastoji od m decimalnih mjesta, $\left(\frac{1}{10}\right)^m$.

Potencija s iracionalnim eksponentom znači granicu, kojoj se približava dvostruki niz, komu su članovi potencije s eksponentnima jednakim približnim vrijednostima tog iracionalnog broja.

Tako je na pr. $5^{\sqrt{2}}$ predočeno ovim dvostrukim nizom

$$\left(\begin{matrix} 5^1; & 5^{1\cdot4}; & 5^{1\cdot41}; & 5^{1\cdot414}; \ldots \\ 5^2; & 5^{1\cdot5}; & 5^{1\cdot42}; & 5^{1\cdot415}; \ldots \end{matrix}\right)$$

I ovdje se dade lako pokazati, da članovi prvog dijela dvostrukog niza sve jače rastu, drugog dijela da se sve više umanjuju, i da se razlika između korespondentnih članova obaju dijelova, ako se n uzme dosta veliko, može učiniti po volji malena.

§ 3. Predočivanje iracionalnih brojeva na brojnoj crti. Neki se iracionalni brojevi na pr. iracionalni drugi korijeni mogu lako predočiti na brojnoj crti. Treba li na pr. odrediti točku, kojoj pripada $\sqrt{2}$, to će se nad jedinicom dužine nacrtati kvadrat i njegova dijagonala prenijeti počevši od ishodišta na brojnu crtu. Dobivena točka pripada $\sqrt{2}$, t. j. toj se točki sve više i više približavaju točke, koje odgovaraju brojevima 1; 1·4; 1·41 . . . s lijeve strane i točke, koje odgovaraju brojevima 2; 1·5; 1·42 . . . s desne strane. Prenesemo li $\sqrt{2}$ počevši od ishodišta na lijevu stranu, dobivamo točku, kojoj pripada — $\sqrt{2}$. Toj se točki sve više i više približavaju točke, koje odgovaraju brojevima — 1; — 1·41 . . . s desne strane i točke, koje pripadaju brojevima — 1·5; — 1·42; . . . s lijeve strane.

Ako je zadan dvostruki niz brojeva, koji određuje bilo koji iracionalan broj, može se s pomoću tog dvostrukog niza brojeva odrediti i točka na brojnoj crti, koja pripada tom dvostrukom nizu brojeva tako točno kakogod hoćemo, jer se s pomoću tog dvostrukog niza brojeva mogu na brojnoj crti odrediti dužine, na kojima će ta se točka nalazi, tako malene kakogod hoćemo.

Obrnuto: svakoj točki na brojnoj crti pripada jedan realni broj. Da to pokažemo, istaknimo na brojnoj crti bilo koju točku M, nanesimo na dužinu određenu točkom O i točkom M najprije jedinicu dužine, koliko puta najviše ide; zatim desetinu jedinice, koliko puta najviše ide, onda stotninu jedinice i t. d. Postoji li zajednička mjera od OM i jedinice, točki M pripada racionalni broj; nema li take mjere, točki M pripada iracionalan broj. Ali u svakom slučaju pripada točki M neki realni broj.

Skup realnih brojeva jest *neprekidan*, jer kad se točka miče po brojnoj crti, da se nijedna točka ne preskoči, to svakom položaju točke odgovara jedan realni broj. A kako svi položaji točke, koja se giba, čine neprekidan niz točaka, to i sistem realnih brojeva čini neprekidan niz točaka. Skup racionalnih brojeva nije neprekidan, jer između dva racionalna broja imade uvijek točaka, koje pripadaju iracionalnim brojevima.

Zadaci, **1.** Napiši nekoliko članova dvostrukog niza za *a)* $\sqrt{3}$, *b)* $\sqrt{5}$, *c)* $\sqrt{7}$, *d)* $\sqrt[3]{3}$, *e)* $\sqrt[3]{5}$, *f)* $\sqrt[3]{10}$.

2. Napiši dvostruki niz, koji određuje *a)* $\sqrt{5}+\sqrt{3}$, *b)* $\sqrt{5}+\sqrt[3]{3}$, *c)* $\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{5}$, *d)* $\sqrt{3}+\sqrt[3]{10}$.

3. Napiši dvostruki niz, koji određuje *a)* $\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{7}$, *b)* $\sqrt{5}+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{10}$, *c)* $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{10}$, *d)* $\pi+\sqrt{3}$.

4. Napiši dvostruki niz, koji određuje *a)* $\sqrt{7}-\sqrt[3]{5}$, *b)* $\sqrt{5}-\sqrt[3]{3}$, *c)* $\sqrt[3]{10}-\sqrt{2}$ *d)* $\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}$, *e)* $\pi-\sqrt{5}$.

5. Napiši dvostruki niz, koji određuje *a)* $\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{5}$, *b)* $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}$, *c)* $\sqrt[3]{10}\cdot\sqrt{7}$, *d)* $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}$, *e)* $\pi\sqrt{2}$.

6. Napiši dvostruki niz, koji određuje *a)* $\sqrt{5}:\sqrt[3]{2}$, *b)* $\sqrt{7}:\sqrt[3]{3}$, *c)* $\sqrt[3]{10}:\sqrt{2}$, *d)* $\sqrt{3}:\sqrt[3]{3}$, *e)* $\pi:\sqrt{2}$.

7. Napiši dvostruki niz, koji određuje *a)* $-\sqrt{2}$, *b)* $-\sqrt{3}$, *c)* $-\sqrt[3]{3}$, *d)* $-\sqrt[3]{10}$.

8. Napiši dvostruki niz, koji određuje *a)* $5^{\sqrt{3}}$, *b)* $7^{\sqrt{3}}$, *c)* $4^{\sqrt[3]{2}}$, *d)* $2^{\sqrt[3]{5}}$, *e)* $10^{\sqrt[3]{10}}$, *f)* 2^{π}.

§ 4. Imaginarni i kompleksni brojevi. Izraz $\sqrt{-a}$ i općeno $\sqrt[2n]{-a}$, gdje je a veće od nule, nema u području realnih brojeva

nikakova značenja, jer nema nikakova realna broja, komu bi parna potencija bila jednaka negativnom broja $-a$. Dok se izrazima takog oblika ne da posve određeno značenje, ne mogu se s njima izvoditi nikakove računske operacije. U svrhu da odredimo određeno značenje izrazima oblika $\sqrt{-a}$, proširit ćemo ponovno brojno područje, te ćemo prije svega odrediti, da $\sqrt{-a}$ ima da znači $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{a}$. Tom definicijom svedeno je razmatranje izraza $\sqrt{-a}$ na razmatranje izraza $\sqrt{-1}$, koji još nema nikakova značenja. Izraz $\sqrt{-1}$ označit ćemo kratkoće radi s i i dati mu određeno značenje time, što ćemo odrediti, da ima da bude:

$$i^2 = -1.$$

Izraz $\sqrt{-1}$ ili i zove se *imaginarna jedinica*. Produkt realnog broja b s imaginarnom jedinicom označuje se s bi i zove *imaginarni broj*.

Brojeve oblika $a+bi$ zovemo *kompleksnim brojevima*. Kompleksni je broj najopćeniji oblik broja. U tom su obliku sadržani svi mogući brojevi: za $b=0$ dobivamo sve realne brojeve, za $a=0$ sve imaginarne brojeve i za vrijednosti od a i b različite od nule sve kompleksne brojeve. U kompleksnom broju $a+bi$ zove se a *realni* dio, bi *imaginarni* dio. Broj b zove se faktor imaginarne jedinice.

Dva kompleksna broja oblika $a+bi$ i $a-bi$, t. j. koja se među sobom razlikuju samo predznakom faktora imaginarne jedinice, zovu se *konjugirano kompleksni*.

S kompleksnim je brojevima prošireno četvrti put brojno područje.

Za računanje s kompleksnim brojevima treba postaviti više definicija, pri čem se moramo obazrijeti na *princip permanencije računskih operacija*, koji kazuje, da se formule i zakoni dokazani u jednom brojnom području prenose i na područje novih brojeva. Zato se definicije za direktne računske operacije s kompleksnim brojevima imaju tako odabrati, da se s kompleksnim brojevima možemo računati kao da je i neki realni faktor, a i^2 treba svagdje zamijeniti s -1. Definicije za inverzne računske operacije ostaju nepromijenjene.

Račun s kompleksnim brojevima ima se smatrati svršen, kad je rezultat predočen u obliku kompleksna broja.

Prva definicija. Jednakost kompleksnih brojeva. Dva kompleksna broja $a+bi$ i $c+di$ jesu jednaka onda i samo onda, kad je $a=c$ i $b=d$.

Prema tomu se svaka jednadžba između kompleksnih brojeva raspada u dvije jednadžbe s realnim brojevima.

Iz gornje definicije izlazi, da je $a+bi=0$, kad je $a=0$ i $b=0$.

Druga definicija. Zbrajanje kompleksnih brojeva.

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+i\,(b+d).$$

Primjeri: $(3+4i)+(-2+6i)=1+10i$; $(a+bi)+(a-bi)=2a$.

Odbijanje kompleksnih brojeva.

$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+i\,(b-d)$, jer je $[(a-c)+i\,(b-d)]+(c+di)=a+bi$.

Primjer. $(4+5i)-(2-3i)=(4-2)+(5+3)i=2+8i$.

Treća definicija. Množenje kompleksnih brojeva.

$$(a+bi)(c+di)=ac+bci+adi+bdi^2=ac-bd+(ad+bc)i.$$

Primjeri: $ai\cdot bi=abi^2=-ab$; $(2-3i)(3+4i)=18-i$, $(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2$.

Produkt dvaju konjugirano kompleksnih brojeva jest realan.

Dijeljenje kompleksnih bojeva. Odrediti kvocijent dvaju kompleksnih brojeva $a+bi$ i $c+di$ znači odrediti takav broj $x+iy$, da bude

$$a+bi=(c+di)(x+iy) \text{ ili}$$
$$a+bi=cx-dy+(dx+cy)i.$$

Ova je jednadžba ekvivalentna ovim dvjema:

$$a=cx-dy,\ b=dx+cy.$$

Iz ovih se jednadžbi dobiju ove vrijednosti za x i y:

$$x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\quad y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

Ako dakle $c+di$ nije jednaki nuli, egzistira kompleksni broj, koji pomnožen s $c+di$ daje za produkt $a+bi$. Taj je broj

$$\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i.$$

Bilješka 1. Do tog oblika za kvocijent kompleksnih brojeva $a+bi$ i $c+di$ možemo doći također tako, da proširimo na kompleksne brojeve poučak o nepromjenljivosti kvocijenta kao i poučak o diobi zbroja nekim brojem. Da se onda dođe do gornjeg oblika za kvocijent, treba brojnik i nazivnik pomnožiti s $a-bi$.

Primjer. $$\frac{3+i}{2-i}=\frac{(3+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{6+5i+i^2}{4-i^2}=$$
$$=\frac{5i+5}{5}=i+1.$$

Bilješka 2. Ako je $bc = ad$, tad je $\frac{a + bi}{c + di} = \frac{a}{c}$.

Četvrta definicija. Potenciranje kompleksnih brojeva:

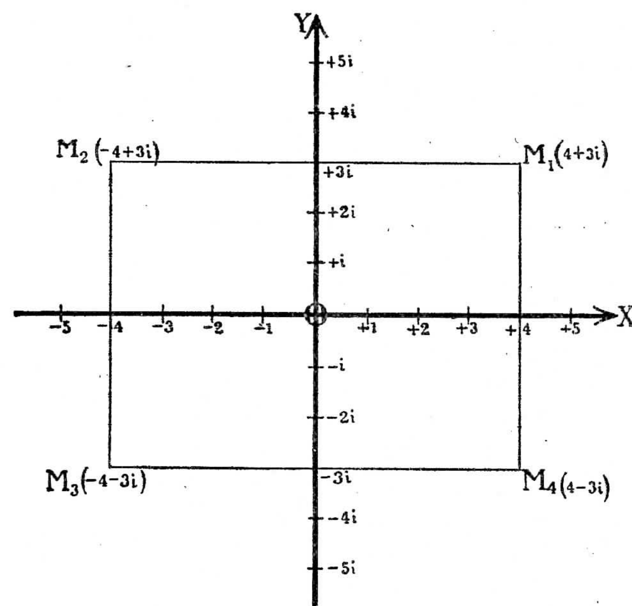
$$(a + bi)^m = \underbrace{(a + bi)\ (a + bi)\ \ldots\ (a + bi)}_{m \text{ faktora}}.$$

Primjeri. $(a + bi)^2 = a^2 + 2abi + b^2i^2 = a^2 - b^2 + 2abi$;
$(a + bi)^3 = a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i$.

Napose je:

$i^3 = i^2 \cdot i = -i;\ i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)\ (-1) = +1,$
$i^5 = i^4 \cdot i = i, \quad i^6 = i^4 \cdot i^2 = (+1)\ (-1) = -1,$
$i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i, \quad i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1.$

Općeno: $i^{4n+1} = +i,\ i^{4n+2} = -1,\ i^{4n+3} = -i,\ i^{4n+4} = +1.$



Slika 1.

Bilješka. $\sqrt[n]{a + bi}$ $(b \gtrless 0)$ imade, kako potanka razmatranja pokazuju, n različitih vrijednosti, koje su sve kompleksne.

Primjer: $\sqrt{5 + 12i} = \pm (3 + 2i)$, jer je $[\pm (3 + 2i)]^2 = 5 + 12i$.

Realne smo brojeve predočivali na osi x i to pozitivne na desnoj strani, negativne na lijevoj strani od ishodišta. Imaginarni se brojevi mogu predočiti na osi ordinata i to pozitivni imaginarni brojevi na pozitivnoj, negativni imaginarni brojevi na negativnoj osi ordinata.

Zgodno je, da se dužine, kojima odgovaraju brojevi $+1$ i $+i$ odaberu jednake velike. Kompleksni je broj $a + bi$ predočen točkom s apcisom a i ordinatom b. Točke M_1, M_2, M_3, M_4 (sl. 1.) predočuju redom kompleksne brojeve: $4 + 3i$, $-4 + 3i$, $-4 - 3i$, $4 - 3i$.

Zadaci. Reduciraj:

1. *a)* $\sqrt{-9} + 3\sqrt{-25} + 2\sqrt{-49}$,
b) $\sqrt{-\frac{9}{16}} + 5\sqrt{-\frac{4}{25}} - 6\sqrt{-\frac{36}{49}}$.

2. Koju vrijednost imaju ove potencije od i:
a) i^{12}, *b)* i^{25}, *c)* i^{30}, *d)* i^{49}, *e)* i^{60}?

Izračunaj:

3. *a)* $(3 + 2i) - (4 - 3i) - (5 - 6i)$,
b) $(-2 + 4i) - (-3 + 5i) - (8 - 7i)$,
c) $i^5 + i^8 + i^{16} + i^{10}$, *d)* $4i^{12} - 2i^{11} + 3i^{15} - 5i^9$.

4. *a)* $3i \cdot 4i$, *b)* $ai \cdot bi \cdot ci$, *c)* $5i^2\sqrt{-9a^2}$, *d)* $i^2\sqrt{-9b^2}$,
e) $i\sqrt{a}\sqrt{-a}$, *f)* $(4i)^2(-5i)^3$, *g)* $(-3i)^2(-2i)^3(-i^5)$.

Odredi ove kvocijente:

5. $\frac{\sqrt{-16}}{\sqrt{+2}}$, *b)* $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{-2}}$, *c)* $\frac{1}{i^2}$, *d)* $\frac{ai}{\sqrt{-a}}$, *e)* $\frac{-a}{i\sqrt{-a^2}}$.

Odredi ove produkte:

6. *a)* $(4 + i)(5 - 3i)$, *b)* $(6 + 2i)(3 - i)i$, *c)* $(5 + 9i)(5 - 9i)$,
d) $(4 + 7i)(4 - 7i)$, *e)* $(a^3 + b^3i)(a^3 - b^3i)$.

Rastavi u produkt binoma:

7. *a)* $x^2 + y^2$, *b)* $x^4 + y^4$, *c)* $x + y$.

Izračunaj ove potencije:

8. *a)* $(4 \pm 3i)^2$ *b)* $(2 \pm i)^2$, *c)* $(3 + 2i)^2$, *d)* $(1 + i)^3$,
e) $(2i - 3)^3$, *f)* $(2 + i)^4$, *g)* $(3 - 4i)^4$, *h)* $(i - 1)^4$.

9. Izračunaj $x^2 - 4x + 5$ za *a)* $x = 2 + i$, *b)* $x = 2 - i$.

10. Izračunaj $x^4 + 1$ za *a)* $x = \frac{-1 + i}{\sqrt{2}}$, *b)* $x = \frac{-1 - i}{\sqrt{2}}$.

11. Izračunaj $x^3 - 8$ za *a)* $x = -1 + i\sqrt{3}$, *b)* $x = -1 - i\sqrt{3}$.

Odredi ove kvocijente:

12. *a)* $\frac{1 + i}{1 - i}$, *b)* $\frac{1 + 2i}{2 - i}$, *c)* $\frac{3 + 2i}{2i - 3}$, *d)* $\frac{1 + i}{(1 - i)^3}$,
e) $\frac{2 + 3i}{(2 - 3i)^2}$, *f)* $\frac{a}{a + bi}$, *g)* $\frac{1 - i^3}{(1 + i)^3}$.

13. *a)* $(i^3 - 1) : (i - 1)$, *b)* $(243i^5 - 32) : (3i - 2)$,
c) $(3i^4 - i^3 + i^2 - i - 2) : (3i + 2)$.

Računanje s približnim vrijednostima.

§ 5. Potpuni i nepotpuni brojevi. Brojevi, s kojima izvodimo računske operacije, poznati su nam često samo približno: tako na pr. zavisi točnost brojeva, koji predočuju rezultate mjerenja o stepenu savršenosti aparata za mjerenje, o spretnosti i vještini motrioca kao i savršenosti njegovih sjetila. Kad dijelimo dva broja, dobivamo za rezultat ponajčešće beskonačni decimalni razlomak; treba li s njim izvoditi kakovu računsku operaciju, uzimamo mjesto prave vrijednosti tog razlomka vrijednost, koja joj je približno jednaka. Dakle ni u tom slučaju nije broj, s kojim se izvodi koja računska operacija, točan. Slično vrijedi i za brojeve, koji se dobivaju kod izračunavanja korijena i kod određivanja omjera dviju veličina, koje nemaju zajedničke mjere.

Kad se računa s približnim vrijednostima, ne može se ni rezultat dobiti sasvim točan. No u mnogim se zadacima ni ne radi o tom, da rezultat bude sasvim točan, već se ponajviše nastoji oko toga, da pogrješka ne prijeđe neku određenu granicu. Ako na pr. rezultat znači dinare, treba nam poznati samo prva dva njegova decimalna mjesta, jer desetine pare ne ulaze u obzir. Ipak treba paziti na to, da pogrješka, koja se kod takih računa čini, ne bude veća od jedinice ili još bolje od polovice jedinice drugog decimalnog mjesta.

Kažemo, da je neki broj *potpun* ili *točan*, ako su poznate sve znamenke tog broja. Na pr. 5·42, 9400 i t. d.

Neki je broj *nepotpun* ili *netočan*, ako su nam poznate samo znamenke na višim mjestima, a ostale su ili nepoznate ili smo ih namjerice zanemarili. Ako su u nepotpunom broju nepoznata cijela mjesta, naznačuje se to manjim nulama. Na pr. 43oo znači, da nam u tom broju nisu poznate ni desetice ni jedinice. Ako su pak nepoznata decimalna mjesta, naznačujemo to s točkama iza posljednog decimalnog mjesta. Na pr. 56·432 . . ., 3·48 . . . i t. d. Želimo li naznačiti, da nam je od broja π poznato samo 5 decimalnih mjesta ili da samo 5 decimalnih mjesta želimo uzeti u obzir, pišemo $\pi = 3{\cdot}14159\ldots$

§. 6. Granica pogrješke nepotpuna broja. Skraćivanje decimalnih brojeva. Točnost nepotpunih brojeva. Ako je a točan broj, a' njegova približna vrijednost, to se razlika $a - a' = \alpha$ zove *apsolutna pogrješka* ili naprosto *pogrješka* vrijednosti a'.

Razlika α jest pozitivna, ako je približna vrijednost a' manja od točne vrijednost a; u protivnom slučaju jest α negativno. Ako je a' rezultat mjerenja, nije nam poznata vrijednost od α; jedino što se

o α može reći jest, da α po svojoj apsolutnoj vrijednosti ne prelazi određene granice ε, koja se zove *granica pogrješke*. Granica pogrješke može u najnepovoljnijem slučaju iznositi jednu jedinicu posljednjeg pridržanog mjesta. Ako je na pr. zadan nepotpuni broj 12·432 . . ., granica je pogrješke 0·001, jer uzmemo li, da je potpuni broj bio 12·43299999, to je pogrješka 0,00099999, te je dakle i u tom slučaju manja od 0·001.

Zadržimo li od nekog točnog konačnog ili beskonačnog decimalnog broja određen broj najviših mjesta i zanemarimo li sva ostala, dobivamo nepotpuni broj, koji zovemo također *skraćenim brojem*, a sam postupak zovemo *skraćivanje brojeva*. Pogrješka tako skraćena broja leži između 0 i jedne jedinice posljednjeg pridržanog mjesta. Skratimo li broj 64·5683 na 64·56, to je pogrješka $\alpha = 0{\cdot}0083$, te je ona manja od 0·01 t. j. $0 < \alpha < 0{\cdot}01$. Povisimo li pak posljednje pridržano mjesto za jednu jedinicu, dobivamo broj, koji je veći od točne vrijednosti. Pogrješka tog broja leži između negativne jedinice posljednjeg pridržanog mjesta i nule. Ako se gornji broj skrati na 64·57, to pogrješka $\alpha = -0{\cdot}0017$ leži između $-0{\cdot}01$ i 0 t. j. $-0{\cdot}01 < \alpha < 0$.

No decimalni broj može se zgodnije skratiti tako, da pogrješka bude po apsolutnoj vrijednosti *manja od polovice jedinice posljednjeg pridržanog mjesta*. U tu se svrhu kod skraćivanja posljednja pridržana znamenka, ako je prva izostavljena znamenka manja od 5, ostavi nepromijenjena; ako je pak jednaka ili veća od 5, povisi se za jednu jedinicu njezine mjesne vrijednosti. Kad povisujemo posljednju znamenku, kažemo, da *korigiramo*, a broj, koji se posljednjoj znamenci dodaje, zove se *korektura*. Gornji broj 64·5683 na 2 decimale skraćen daje u tom slučaju 64·57 . . . Slično daje:

52·456 na 1 dec. skraćeno 52·5,
48·648 na 4 dec. skraćeno 48·6489,
75645 na stotice skraćeno 756oo.

Ako je obrnuto zadan nepotpuni broj 17·667 . . . , koji je nastao takim skraćivanjem, to se njegova pogrješka α nalazi između $-0{\cdot}0005$ i $+0{\cdot}0005$ t. j. prava se vrijednost nalazi između 17·6665 i 17·6675, a granica je pogrješke jednaka 0·0005.

Počevši od sada pretpostavljat ćemo, da je svaki nepotpuni broj skraćen tako, da je *granica pogrješke jednaka polovici jedinice posljednjeg pridržanog mjesta*, te ćemo u tom slučaju kazati, da su sva zadana mjesta nepotpuna broja pouzdana.

Točnost nepotpunog broja određena je kvocijentom od tog broja i njegove granice pogrješke t. j. brojem, koji pokazuje, na koliko jedinica približne vrijednosti dolazi jedna jedinica granice pogrješke.

Od 2 nepotpuna broja onaj je točniji, u koga je taj kvocijent veći. Ako je na pr. jedna dužina jednaka 246·4 . . . *cm*, druga 31·7 . . . *cm*, to nam kvocijent $246{\cdot}4 : (\frac{1}{2} \cdot 0{,}1) = 2 \cdot 2464$ pokazuje, da na $2 \cdot 2464$ *cm* otpada pogrješka najviše 1 *cm*, dok kvocijent $31{\cdot}7 : (\frac{1}{2} \cdot 0{,}1) = 2 \cdot 317$ pokazuje, da već na $2 \cdot 317$ *cm* otpada pogrješka najviše 1 *cm*. Dakle je prva dužina točnije izmjerena nego li druga. Slično je na pr. 5·846 . . . točnije od 25·5 . . ., jer je $\frac{5{\cdot}846}{\frac{1}{2}{\cdot}0{\cdot}001} = 2 . 5846$ veće od $\frac{25{\cdot}5}{\frac{1}{2} \cdot 0{\cdot}1} = 2 \cdot 255$; isto je tako 4·520 . . . točnije od 4·52. Da se dakle odredi, koji je od 2 nepotpuna decimalna broja točniji, treba izostaviti decimalnu tačku, pa gledati, koji je od oba broja veći. Potpuni je broj točniji od bilo kojeg nepotpunog broja.

§ 7. Granica pogrješke kod računskih rezultata. Kad se s nepotpunim brojevima izvode računske operacije, rezultat jest također nepotpun broj; zato je potrebno, da se odredi, koje su granice pogrješke rezultata operacije s nepotpunim brojevima, ako su poznate granice pogrješke tih nepotpunih brojeva. Taj ćemo zadatak razriješiti za 4 osnovne operacije.

α) *Zbrajanje.* Granica pogrješke zbroja jednaka je zbroju granica pogrješke pojedinih pribrojnika.

Ako su a', b', c', približne vrijednosti brojeva a, b, c, i α, β, γ, pripadne granice pogrješke, to je

$$a' - \alpha < a < a' + \alpha,$$
$$b' - \beta < b < b' + \beta,$$
$$\underline{c' - \gamma < c < c' + \gamma.}$$

Zbrojimo li te nejednadžbe, izlazi

$(a' + b' + c') - (\alpha + \beta + \gamma) < a + b + c < (a' + b' + c') + + (\alpha + \beta + \gamma)$ t. j. $\alpha + \beta + \gamma$ jest granica pogrješke zbroja $a' + b' + c'$.

β) *Odbijanje.* Granica pogrješka razlike jednaka je zbroju granicâ pogrješke minuenda i suptrahenda.

Ako su a' i b' približne vrijednosti brojeva a i b, a α i β granice pogrješke, to je

$$a' - \alpha < a < a' + \alpha,$$
$$b' + \beta > b > b' - \beta.$$

Odatle izlazi

$(a' - b') - (\alpha + \beta) < a - b < a' - b' + (\alpha + \beta)$ t. j. $\alpha + \beta$ jest granica pogrješke razlike $a' - b'$.

γ) *Množenje.* Ako su α i β granice pogrješke nepotpunih faktora a' i b', to se vrijednost produkta ab nalazi između $(a' - \alpha)(b' - \beta)$ i $(a' + \alpha) \cdot (b' + \beta)$ t. j. $a'b' - (a'\beta + b'\alpha) + \alpha\beta < ab < a'b' + (a'\beta + b'\alpha) + \alpha\beta$.

Kako je produkt $\alpha\beta$ relativno malen, ne trebamo se na nj obazirati, te se za granicu pogrješke od $a'b'$ može uzeti broj $a'\beta + b'\alpha$.

δ) *Dijeljenje.* Ako je a' nepotpuni dividend, b' nepotpuni divizor, i ako su α i β granice pogrješke dividenda i divizora, to je

$$a' - \alpha < a' < a' + \alpha,$$
$$b' + \beta > b' > b' - \beta.$$

Podijelimo li obje te nejednadžbe, dobivamo

$$\frac{a' - \alpha}{b' + \beta} < \frac{a'}{b'} < \frac{a' + \alpha}{b' - \beta}.$$

Razlika između prave vrijednosti $\frac{a}{b}$ i $\frac{a'}{b'}$ bit će manja od veće od razlikâ $\frac{a' + \alpha}{b' - \beta} - \frac{a'}{b'} = \frac{b'\alpha + a'\beta}{b'(b' - \beta)}$ i $\frac{a'}{b'} - \frac{a' - \alpha}{b' + \beta} = \frac{b'\alpha + a'\beta}{b'(b' + \beta)}$ t. j. od $\frac{b'\alpha + a'\beta}{b'(b' - \beta)}$. Ako je $\frac{\beta}{b'}$ prema 1 vrlo maleno, može se za granicu pogreške od $\frac{a'}{b'}$ uzeti izraz $\frac{b'\alpha + a'\beta}{b'^2}$.

§ 8. Skraćeno računanje uopće. Kad treba da s više zadanih brojeva, koji su ili točni ili se točno mogu odrediti, izvedemo koju računsku operaciju, nije uvijek nužno, da poznamo rezultat sasvim točno, već često dostaje rezultat izračunati približno na određeni broj decimala. Ako pak zadani brojevi nisu točno poznati, već su nepotpuni, treba vazda rezultat izračunati s *dostiživom točnošću* t. j. s najvećom mogućom točnosti, kojom se rezultat uopće dade izračunati. Treba prema tomu razlikovati skraćeno računanje s potpunim brojevima od skraćenog računanja s nepotpunim brojevima.

§ 9. Skraćeno zbrajanje. α) *Potpuni brojevi.* Da zbrojimo manje od 10 decimalnih brojeva na m decimalnih mjesta, skratimo svaki pribrojnik na $m + 1$ decimalno mjesto tako, da je pogrješka svakog pribrojnika manja od $\frac{1}{2} \frac{1}{10^{m+1}}$. Pogreška dobivenog zbroja jest onda manja od $\frac{9}{2} \frac{1}{10^{m+1}}$, pa prema tomu, kad je broj pribrojnika manji od 10, ne utječe na m-to decimalno mjesto.

Uzme li se dakle $(m + 1)$-vo mjesto zbroja za korekturu, dobit će se po mogućnosti točan rezultat na m decimalnih mjesta. Ako je broj pribrojnika između 10 i 100, treba skratiti svaki pribrojnik na $m + 2$ decimalna mjesta.

Primjer: Neka se izračuna na 3 decimale zbroj 24·564172 + + 134·873146 + 75·627485 + 49·532329. Svaki će se pribrojnik pribrojnik skratiti na 4 decimale, pa ćemo imati:

24·5642
134·8731
75·6275
49·5323
284·597$_\text{L}$1 = 284·597 . . .

β) *Nepotpuni brojevi.* Ako su u zbroju više pribrojnika svi pribrojnici ili samo nekoji od njih nepotpuni, treba sve pribrojnike skratiti na toliko decimala, koliko ih sadrži onaj nepotpuni pribrojnik, koji imade najmanje decimalnih mjesta. Pogrješka je zbroja manja od $\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{10^m}$, gdje je n broj nepotpunih i skraćenih pribrojnika, a m zajednički broj decimala nakon skraćivanja.

Primjer. Neka se odredi zbroj 0·6235 . . . + 0·76876 . . . + + 0·582 . . . + 0·94 . . . Sve pribrojnike treba skratiti na 2 decimale.

0·62 . . .
0·77 . . .
0·58 . . .
0·94 . . .
2,9$_\text{L}$1 = 2·9 . . .

Granica pogrješke zbroja jest $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^2} = 2 \cdot 0{\cdot}01 = 0{\cdot}02$. Odakle izlazi, da u zbroju posljednje mjesto nije pouzdano; zato se ono uzme za korekturu. Tako će se dobiti zbroj dostiživom točnošću.

§ 10. Skraćeno odbijanje. α) *Potpuni brojevi.* I minuend i suptrahend treba skratiti na $m + 1$ decimalu, ako se želi dobiti pouzdan rezultat na m decimala. Samo u onim slučajevima, kad su i minuend i suptrahend skraćeni na m decimala u isti čas veći ili u isti čas manji od njihovih točnih vrijednosti, dobiva se i iz minuenda i suptrahenda skraćena na m decimala pouzdan rezultat također na m decimala.

Primjer. Neka se izračuna na 3 decimale razlika brojeva 645·67779 i 264·82463. Računamo na 4 decimale.

645·6778 — 264·8246 = 380·853$_\text{L}$2 = 380·853 . . .

Kad bismo odmah računali na 3 decimale, dobili bismo isti rezultat, jer su minuend i suptrahend skraćeni na 3 decimale veći od njihovih točnih vrijednosti. Ako bi pak trebalo izračunati razliku na 2 decimale, treba računati na 3 decimale, jer je minuend skraćen na 2 decimale veći, a suptrahend manji od točne vrijednosti, pa bi pogrješka bila veća od $\frac{1}{2} \cdot 0{\cdot}01$, te prema tome druga decimala ne bi bila pouzdana. U općenom slučaju treba dakle i minuend i suptrahend skratiti na 1 decimalu više negoli se traži, a rezultat opet skratiti na broj decimalnih mjesta za 1 manji.

β) *Nepotpuni brojevi.* Nemaju li minuend i suptrahend jednaki broj decimala, treba u minuendu odnosno u suptrahendu skraćivanjem ukloniti suvišne decimale tako, da broj decimala u oba broja bude jednak. Ako je zajednički broj decimala minuenda i suptrahenda nakon skraćivanja m, to je granica pogrješke za razliku $\frac{1}{10^m}$ t. j. posljednja znamenka razlike nije pouzdana. Zato je treba uzeti za korekturu.

Primjer. Neka se nađe dostiživom točnošću razlika brojeva 6·4328 . . . i 5·762 . . . Minuend treba skratiti na 3 decimale, pa će se dobiti:

6·433 . . .
5·762 . . .
0·67$_\text{L}$1 = 0·67 . . .

Granica je pogrješke 0,001. Rezultat je na 2 mjesta pouzdan.

§ 11. Skraćeno množenje. α) *Potpuni brojevi.* Uzmimo, da treba izračunati produkt 12·56934 · 8 ali samo na 2 decimale. Mogli bismo raditi tako, da taj produkt izračunamo na obični način, pa da ga onda skratimo na 2 decimale. Tako dobivamo

12·56934 · 8
100·55$_\text{L}$472 = 100·55 . . .

Zgodnije možemo taj produkt na 2 decimale izračunati tako, da ne računamo uopće suvišnih decimala. U tu svrhu treba da se pitamo: koje mjesto multiplikanda treba pomnožiti s 8 jedinica, da se dobiju stotnine produkta? Treba da množimo stotnine multiplikanda; ipak zbog veće točnosti treba da pomnožimo još 9 tisućina s 8 i da zadržimo od produkta 72 tisućine 7 stotnina, koje ćemo uzeti za korekturu stotnina, te ćemo govoriti: 8 puta 9 jest 72, korektura 7; 8 puta 6 jest 48 i 7 jest 55, **5**. Sad nastavljamo množenje kao obično: 8 puta 5 jest 40 i 5 jest 45, **5**; 8 puta 2 jest 16 i 4 jest 20, **0**; 8 puta 1 jest 8 i 2 jest **10**. Tako smo na kraći način našli, da je 12·56934 · 8 = 100·55 . . .

Slično postupamo, kad je multiplikator broj s više znamenaka. Na primjer neka se na 2 decimale izračuna produkt 46·32843 · 65·24.

Prije svega treba da odredimo, koje mjesto multiplikanda moramo množiti s najvišim mjestom t. j. s deseticama multiplikatora, da dobijemo 2 decimale ili stotnine u produktu. Nalazimo, da tisućnine multiplikanda množene s deseticama multiplikatora daju stotnine; deset-tisućine multiplikanda uzet će se za korekturu. Pošto smo načinili prvi parcijalni produkt pomnoživši s deseticama multiplikatora čitav multiplikand počevši od tisućine dalje i upotrebivši deset-tisućine multiplikanda za korekturu, množit ćemo, da dobijemo drugi parcijalni produkt, s jedinicama multiplikatora cio multiplikand počevši od stotnina dalje, a tisućine multiplikanda upotrebit ćemo za korekturu. Slično će se

načiniti treći parcijalni produkt i t. d., dok ne načinimo sve parcijalne produkte, koji sadržavaju stotnine. Ti se onda zbroje. Zbog većeg pregleda potpisat će se znamenke multiplikatora obrnutim redom pod znamenke multiplikanda i to tako, da jedinice multiplikatora dolaze točno ispod one decimale multiplikanda, na koju računamo produkt.

46·32843 · 65·24
4 256
277 970
23 164
926
185
3022·45

Govori: 6 puta 4 jest 24, korektura 2; 6 puta 8 jest 48, i 2 jest 50, **0**; 6 puta 2 jest 12 i 5 jest 17, **7**; 6 puta 3 jest 18 i 1 jest 19, **9**; 6 puta 6 jest 36 i 1 jest 37, **7**; itd.; zatim 5 puta 8 jest 40, korektura 4, 5 puta 2 jest 10 i 4 jest 14, **4** itd.

Budući da konačni produkt nastaje zbrajanjem svih parcijalnih produkata, koji su skraćeni brojevi, to će prema onom, što smo vidjeli kod skraćenog zbrajanja, i taj zbroj imati neku pogrešku. Da ta pogreška bude što manja, treba računati skraćeno na 1 decimalu više negoli se traži. Gornji ćemo produkt računati zato na 3 decimale i treću decimalu produkta upotrebit ćemo za korekturu.

46·32843 · 65·24
4256
2779706
231642
9266
1853
3022·46˪7 = 3022·47 . . .

Kad bismo računali na obični način, našli bismo, da je 46·32843 · 65·24 = 3022·4677732 pa vidimo, da se taj rezultat na 2 decimale slaže s lijevo nađenim rezultatom.

Uzmimo još ovaj primjer. Neka se izračuna produkt 0,06422 · 0·74326 na 4 decimale. Računat ćemo na 5 decimala.

0·06422 · 0·74326
6 2347
4495
257
19
1
0·0477˪2 = 0·0477 . . .

β) *Nepotpuni brojevi.* Ako je jedan faktor ili ako su oba faktora nepotpuni brojevi, to će se po mogućnosti točan produkt dobiti, ako se uzme točniji faktor za multiplikator, netočniji za multiplikand, pa se računa produkt na način u α) objašnjen skraćeno na onu decimalu, koju daje produkt najviše znamenke multiplikatora s najnižom znamenkom multiplikanda. Posljednja znamenka tako dobivena produkta nije pouzdana, pa je treba uzeti za korekturu. Granica pogrješke produkta dana je izrazom $a'\beta + b'\alpha$, pa ako je multiplikator točniji t. j. ako je $\frac{b'}{\beta} > \frac{a'}{\alpha}$, to je i $b'\alpha > a'\beta$ t. j. $b'\alpha$ odlučnije je za granicu pogrješke negoli $a'\beta$, te je dakle takim rasporedom faktora postignuto, da će se odmah moći razabrati, na koju se decimalu može produkt izračunati dostiživom točnošću.

Primjeri: Neka se izračuna dostiživom točnošću produkt 28·646 . . . . × 5·624 . . . . Budući da je 28·646 . . . točnije od 5·624 . . ., treba 28·646 . . . uzeti kao multiplikator. Najviša znamenka multiplikatora pomnožena s najnižom znamenkom multiplikanda daje stotnine; produkt će se zato računati skraćeno na 2 decimale, u rezultatu će se posljednja decimala uzeti za korekturu i tako dobiti jedna pouzdana decimala.

5·62 4 . . . · 28·646 . . .
64 68 2
11 24 8
4 49 9
33 7
2 2
3
161,0˪9 = 161, 1 . . . .

Granica je pogrješke produkta 5·624 · · 0·0005 + 28·646 · 0·0005 = 0·0028120 + 0·0143230 = 0·0171350; stotnine dakle, kako je prije rečeno, nisu pouzdane. Kad bismo zamijenili faktore t. j. kad bismo uzeli netočniji faktor za multiplikator, dobili bismo množeći najviše mjesto multiplikatora s najnižim mjestom multiplikanda tisućine; no kako ni stotnine, kako smo vidjeli, nisu pouzdane, suvišno bi bilo izračunavati tisućine.

2. Neka se izračuna produkt 124·5 . . . 0·068754 . . . dostiživom točnošću.

124·5 . . · 0·068754 . . .
4578 6
747 0
99 6
8 7
6
8·55˪9 = 8·56 . . .

Budući da stotnine pomnožene s desetinama daju tisućine, to će se produkt izračunati na 3 decimale i posljednja znamenka uzeti za korekturu.

Kod množenja nepotpunih brojeva treba dakle imati na umu ovo: točniji se faktor uzme za multiplikator, pa se izračuna prvi parcijalni produkt obično, ostali parcijalni produkti skraćeno. Pregleda radi potpišu se znamenke multiplikatora obrnutim redom pod znamenke multiplikanda. Dobiveni se parcijalni produkti zbroje, a mjesna se vri-

jednost produkta odredi lako po mjesnoj vrijednosti najniže znamenke multiplikanda i najviše znamenke multiplikatora. Posljednja znamenka produkta uzme se za korekturu.

§ 12. Skraćeno dijeljenje. *α) Potpuni brojevi.* Neka se odredi kvocijent 812·436 : 34·486 na 2 decimale.

Najprije treba da ustanovimo, koja će biti mjesna vrijednost najviše znamenke kvocijenta. Budući da stotice podijeljene s deseticama daju desetice, to će najviša znamenka kvocijenta imati mjesnu vrijednost desetica. Ima li kvocijent sadržavati 2 decimale, bit će ukupni broj znamenaka u kvocijentu 4. Kako je prva znamenka divizora desetica, to će od znamenaka dividenda utjecati na stotnine kvocijenta samo još desetine (jer desetine podijeljene s deseticama daju stotnine); ostale su pak znamenke dividenda, koje dolaze iza desetina, suvišne, te se mogu izostaviti.

$812\cdot4_{\iota}36 : 3_{\iota}4\cdot_{\iota}4_{\iota}8_{\iota}6 = 23\cdot56$

122 7
19 3
2 1
1

S deseticama (2) kvocijenta treba sad pomnožiti divizor i taj produkt odbiti od dividenda. No kako divi-dend sadrži samo 1 decimalu, a sva su ostala njegova decimalna mjesta suvišna, to će se multiplikacija početi kod onog mjesta divizora, koje pomnoženo s deseticama kvocijenta daje desetine. To su stotnine divizora, a da te budu što točnije, treba tisućine uzeti za korekturu. Ostale su znamenke divizora suvišne. Računat ćemo dakle: 2 puta 6 jest 12 korektura 1 ; 2 puta 8 jest 16 i 1 jest 17 i 7 jest 24, 2 ; 2 puta 4 jest 8 i 2 jest 10 i 2 jest 12, 1 ; 2 puta 4 jest 8 i 1 jest 9 i 2 jest 11, 1 ; 2 puta 3 jest 6 i 1 jest 7 i 1 jest 8. Ostatak 122·7 treba opet podijeliti divizorom; 122 jedinice podijelimo s 34 jedinice daje 3 jedinice. S tim jedinicama treba opet pomnožiti divizor i taj produkt odbiti od 122·7 Budući da odbijanje počinje kod desetina, to ćemo množiti s jedinicama kvocijenta desetine divizora, a stotnine divizora upotrebit će se za korekturu govoreći: 3 puta 8 jest 24, korektura 2, 3 puta 4 jest 12 i 2 jest 14 i 3 jest 17 it. d. Skraćena se dioba svršava, kad se izvede dijeljenje sa samom najvišom znamenkom divizora. Kako pogrješka, koja potječe odatle, što pojedini ostaci nisu točni već skraćeni brojevi, može da utječe na posljednju znamenku kvocijenta, to ona nije pouzdana, pa će se upotrebiti za korekturu. Želimo li imati u kvocijentu određeni broj pouzdanih decimala, treba računati na jednu decimalu više. Razabira se također, da je razlika između običnog i skraćenog postupka u tom, što se kod skraćenog postupka divizor uvijek skraćuje za jednu znamenku, a ostatak ostaje nepromijenjen, dok

kod običnog postupka divizor ostaje nepromijenjen, a ostacima se dodaju daljnje znamenke dividenda ili nule.

2. primjer. Neka se izračuna na 3 decimale kvocijent 68932·613 : : 865·3546. Računat ćemo na 4 decimale.

$68932\cdot61_{\iota}3 : 8_{\iota}6_{\iota}5\cdot_{\iota}3_{\iota}5_{\iota}4_{\iota}6 = 79\cdot658_{\iota}2 = 79\cdot658\ldots$

8357 79
569 60
50 39
7 12
20
3

Prva znamenka kvocijenta bit će desetica; kvocijent će sadržavati 6 znamenaka, posljednja znamenka kvocijenta znači deset-tisućine; na deset-tisućine kvocijenta utjecat će samo još stotnine dividenda (jer stotnine podijeljene stoticama daju deset-tisućine), ostale su znamenke dividenda suvišne, te se mogu izostaviti. Desetice kvocijenta treba množiti s tisućinama divizora, da se dobiju stotnine dividenda, deset-tisućine divizora upotrebit će se za korekturu. Dalje se postupa analogno kao u pređašnjem primjeru.

Iz oba se primjera razabira, da će skraćeni kvocijent imati toliko znamenaka koliko i skraćeni divizor, a skraćeni dividend također toliko ili za jednu znamenku više već prema tomu, da li je prva znamenka dividenda veća od prve znamenke divizora ili je od nje manja. Ako je jednako prvih n znamenaka u dividendu i divizoru, odlučuje $(n+1)$-va znamenka. Ima li divizor manje znamenaka negoli ih ima sadržavati kvocijent, počet će skraćeno računanje tek u toku računa.

3. primjer. Neka se izračuna kvocijent 85·7843 : 5·46 na 2 decimale.

$85\cdot784_{\iota}3 : 5\cdot_{\iota}4_{\iota}6 = 15\cdot71_{\iota}1 = 15\cdot71\ldots$

31 18
3 884
62
7
2

Budući da kvocijent ima sadržavati 5 znamenaka, a u divizoru su samo 3 znamenke, to će se odrediti prve 2 znamenke kvocijenta na obični način, a daljnje 3 na skraćeni način.

Kod skraćenog dijeljenja potpunih brojeva treba se dakle držati ovih pravila:

1. Odredi mjesnu vrijednost prve znamenke kvocijenta i onda broj znamenaka skraćenog kvocijenta; u divizoru pridrži toliko znamenaka, koliko ih imade kvocijent, a prvu znamenku nadesno od posljednje pridržane znamenke uzmi za korekturu. Ima li kvocijent sadržavati više znamenaka nego ih imade divizor, skraćeno dijeljenje počne tek, pošto je na obični način određen potreban broj znamenaka u kvocijentu.

2. Dividend skrati na toliko mjesta, koliko ih imade divizor (ili kvocijent) ili na jedno mjesto više već prema tomu, da li je

prva znamenka dividenda veća od prve znamenke divizora ili je od nja manja. Ako je u dividendu i divizoru jednako prvih n znamenaka, odlučuje $(n+1)$-va znamenka. Nema li u dividendu dosta znamenaka, dopiši potreban broj nula.

3. Kad si odredio prvu znamenku kvocijenta i s njom pomnožio skraćeni divizor (uzevši u obzir korekturu), pa taj produkt odbio od skraćenog dividenda, ne dopisuj ostatku daljnje znamenke dividenda već pokrati divizor za jedno mjesto, koje ćeš kod množenja s drugom znamenkom kvocijenta uzeti za korekturu. Tako nastavljaj dotle, dok se ne dođe do jedne jedine znamenke u divizoru, s kojom se onda završuje skraćeno dijeljenje. Posljednju znamenku tako određena kvocijenta uzmi za korekturu.

β) *Nepotpuni brojevi.* Ako su dividend ili divizor ili oba broja nepotpuni, treba u dividendu i divizoru pridržati samo toliko mjesta, koliko ih imade manje točan od oba broja i onda oba broja skraćeno podijeliti. Prva dva mjesta dividenda broje za jedno, ako je prva znamenka dividenda manja od prve znamenke divizora (vidi gore točka 2). Želimo li pak u kvocijentu manje znamenaka, treba ih u divizoru zadržati toliko, koliko ih hoćemo imati kvocijentu, a u dividendu isto toliko ili za jednu više. Posljedna znamenka kvocijenta nije pouzdana. Granica je pogrješke dana izrazom $(a'\beta + b'\alpha) : b'^2$.

Primjer. Neka se odredi dostiživom točnošću kvocijent 8,642...: : 0·187,...

8·64$_\iota$2 ... : 0·1$_\iota$8$_\iota$7 ... = 46·$_\iota$2 = 46· ...
1 16
4
0

Kvocijent izračunat na obični način jest 46·2129...; granica je pogrješke (8·642 + 0·187) · 0·0005 : 0·187² = 8·829 · 0·0005 : : 0·034969 = 0·1262... Dakle desetine kvocijenta nisu pouzdane.

Zadaci. **1.** Poređaj po stepenu točnosti: 0·62̇, 4·806..., 0·02..., 76·3284...; 709000, 4001·42356...

2. Skrati na 3 dec. mjesta:
a) 48·7278, *b)* 4·33258, *c)* 0·5672, *d)* 7·7747.

3. Skrati na stotice: *a)* 45672, *b)* 56643, *c)* 72481.

4. Izračunaj na 2 decimale:
62·3484 + 5·6923 + 0·86721 + 0·0088786

5. Izračunaj na 3 decimale:
56·87624 + 431·37681 + 0·00686 + 9·04908.

6. Izračunaj na 4 decimale:
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{3\cdot5\cdot7}+\frac{1}{3\cdot5\cdot7\cdot9}+\frac{1}{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}.$$

7. Izračunaj na 2 načina:
$8\frac{2}{7}+4\frac{5}{6}+7\frac{5}{9}+11\frac{5}{12}+8\frac{7}{10}$ (4 dec.)

Izračunaj dostiživom točnošću (8 — 10):

8. 54·326... + 0·87... + 3·534... + 6·2485 + 0·9246...

9. 2·354... + 0·876 + 0·58̇ + 4·33̇2̇.

10. 22·4568... + 75·00769... + $13\frac{3}{4}+4\frac{5}{13}$ + 0·06984...

11. Izračunaj:
a) 0·7456 — 0·6893 (2 dec.), *b)* 768·4326 — 35·8789 (1 dec.).

12. *a)* 24·326... — 8·79..., *b)* 0·98...—0·0684... (dost. toč.).

13. *a)* 4·82 — 3·5653 ... *b)* 3·52̇4 — 2·6864... (dost. toč.).

14. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}-\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6}-\frac{1}{6\cdot7}+\frac{1}{7\cdot8}-\frac{1}{8\cdot9}$ (4 dec.).

15. *a)* 0·62348 · 3·5432 (3 dec.), *b)* 324·56 · 48·243 (2 dec.).

16. *a)* 0·08762 · 0·6493 (5 dec.), *b)* 62·0483 · 36·24601 (1 dec.).

17. *a)* 684·24 · 1246·35 (jedinice), *b)* 0·9231 · 83·264 (3 dec.).

18. 0·8423 · 3·7261 · 4·3543 (4 dec.).

Izračunaj dostiživom točnošću (19 — 23):

19. *a)* 0·643 × 6·386 ... *b)* 9·385 ... × 9·226 ...

20. *a)* 3·14159 ... × 126, *b)* 4·56 ... × 4·56 ... × 4·56 ...

21. *a)* 0·19645 ... × 2·1567 ... *b)* 726·54 ... × 0·056 ...

22. 226·42 × 0·0683 ... × 0·09421 ...

23. 0·45 × 0·7542 ... × 0·3584 ...

Izračunaj skraćeno na naznačeni broj decimala (24 — 29):

24. *a)* 456·384 : 25·7583 (2 dec.), *b)* 75·8516 : 48·576 (2 dec.).

25. *a)* 19·6419 : 32·456 (3 dec.) *b)* 86·524 : 458·32 (3 dec.).

26. *a)* 0·86812 : 3·645 (4 dec.) *b)* 0·456238 : 0·85643 (3 dec.).

27. *a)* 0·608457 : 0·0487 (2 dec.), *b)* 6·58749 : 7·563 (4 dec.).

28. *a)* 0·4564 : 0·003246 (na jedinice), *b)* 1 : 24·38 (5 dec.).

Izračunaj dostiživom točnosti (30 — 36):

29. *a)* 208·623 ... 2·564, *b)* 14·656 : 0·238 ...

30. *a)* 1·8635 ... : 0·9216 ..., *b)* 0·4264 : 87·53 ...

31. *a)* 0·42876 ... : 360·0683 ..., *b)* 499·686 ... : 0·09894 ...

32. *a)* $4\frac{3}{7}$: 5·684 . . ., *b)* 0·0964 . . . : $6\frac{5}{13}$.

33. *a)* 876· 43 . . . : 0·0935 . . . *b)* 34·51826 . . . : 956·458 . . .

34. *a)* 2·468 . . . × 7·56 : 4·52, *b)* 7,568 . . . × 0·0896 . . . : 450·25 . . .

35. 1 Amper izluči u 1 sekundi 1·1183 . . . *mg* srebra; koliko u 3 sata 38 minuta?

36. 1 *m* sukna stoji 424·5 *d*; koliko 15·75 *m*? (2 dec.).

37. Cesta duga 8 *km* 46 *m* uspinje se jednoliko za 140·8 *m*. Na kojoj se dužini uspinje za 1 *m* (na metre)?

38. Staza Zemlje oko Sunca iznosi 963 466 000 *km*; taj put prevali zemlja za 365·2422 . . . dana. Koliko α) u 1 danu, β) u 1 satu, γ) u 1 minuti, δ) u sekundi?

Rezultat: **16.** *a)* 0·05689 . . ., *b)* 2249·0 . . . **17.** *a)* 852803· . . ., *b)* 76·861 . . . **18.** 13·6659 . . . **19.** *a)* 4·106 . . . *b)* 86·59 . . . **20.** *a)* 395·84 . . ., *b)* 95· . . . **21.** *a)* 0·4237 . . ., *b)* 41· . . . **22.** 1·46 . . . **23.** 0·1216 . . . **24.** *a)* 17·72 . . ., *b)* 1·56 . . ., **25.** *a)* 0·605 . . ., *b)* 0·189 . . . **26.** *a)* 0·2382 . . ., *b)* 0·533 . . . **27.** *a)* 12·49 . . ., *b)* 0·8710 . . . **28.** *a)* 141· . . ., *b)* 0·04102 . . . **29.** *a)* 81·37 . . ., *b)* 62· . . . **30.** *a)* 2·02 . . . *b)* 0·00487 . . . **31.** *a)* 0·001191 . . ., *b)* 50·50, . . . **32.** *a)* 0·779 . . ., *b)* 0·015 . . . **33.** *a)* 9400 . . ., *b)* 0·036090 . . . **34.** *a)* 4·13 . . ., *b)* 0·00151 . . . **35.** 14630 *mg* **36.** 6685·88 *d*. **37.** 57· . . . *m*. **38.** *a)* 2 637 882 . . . *km*.)

II. Poglavlje

Kvadratne jednadžbe s 1 nepoznanicom. Sistem od kvadratne i linearne jednadžbe s 2 nepoznanice. Problemi drugog stepena.

§ **13. Kvadratne jednadžbe s jednom nepoznanicom.** Opći je oblik kvadratne jednadžbe s jednom nepoznanicom

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

gdje a, b, c znače poznate realne brojeve ili poznate algebarske izraze. Koeficijenat a nije jednak nuli, jer tad zadana jednadžba ne bi bila drugog stepena, no jedan od koeficijenata b ili c može biti jednak nuli ili pače oba istodobno mogu biti jednaka nuli. U tim slučajevima jednadžba poprima jedan od oblika:

$$ax^2 + c = 0, \quad ax^2 + bx = 0, \quad ax^2 = 0.$$

Te se jednadžbe zovu *nepotpune jednadžbe drugog stepena* ili *nepotpune kvadratne jednadžbe.*

Budući da je koeficijenat a bitno različit od nule, jednadžba

$$ax^2 + bx + c = 0$$

može se podijeliti s a, pa se dobiva njoj ekvivalentna jednadžba

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Stavimo li radi kratkoće u ovu jednadžbu $\frac{b}{a} = p$, $\frac{c}{a} = q$, dobivamo jednadžbu

$$x^2 + px + q = 0,$$

koja se zove *normalni oblik* kvadratne jednadžbe.

§ **14. Rješavanje nepotpunih kvadratnih jednadžbi.** α) Ako je $b = 0$, onda je i $p = 0$, a jednadžba $x^2 + px + q = 0$ poprima oblik

$$x^2 + q = 0.$$

Ta se jednadžba zove *čista kvadratna jednadžba.* Iz te jednadžbe izlazi

$$x^2 = -q.$$

Treba dakle odrediti takvu vrijednost od x, koje je kvadrat jednak $-q$. Tom zahtjevu udovoljavaju samo ove dvije vrijednosti:

$$x_1 = +\sqrt{-q},\ x_2 = -\sqrt{-q}.$$

Kraće pišemo:

$$x = \pm\sqrt{-q}.$$

Čista kvadratna jednadžba ima dakle 2 korijena, koja su protivna. Ako je q negativno, $-q$ jest pozitivno, korijeni su realni. Ako je pak q pozitivno, $-q$ jest negativno, korijeni su imaginarni.

Primjeri. 1. Neka se razriješi jednadžba:

$$9x^2 - 16 = 0.$$

Nalazimo $9x^2 = 16$, $x^2 = \frac{16}{9}$, $x = \pm\sqrt{\frac{16}{9}}$, $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = -\frac{4}{3}$.

2. Neka se razriješi jednadžba:

$$4x^2 + 9 = 0.$$

Izlazi $x^2 = -\frac{9}{4}$, $x = \pm\sqrt{-\frac{9}{4}}$, $x_1 = \frac{3}{2}i$, $x_2 = -\frac{3}{2}i$.

β) Ako je $c = 0$, tad je i $q = 0$, pa jednadžba $x^2 + px + q = 0$ prelazi u jednadžbu

$$x^2 + px = 0.$$

Ta se jednadžba može pisati i ovako:

$$x\,(x + p) = 0.$$

Produkt dvaju faktora jednak je nuli, kad je ili jedan faktor jednak nuli ili drugi faktor jednak nuli. Dakle vrijednosti od x, koje udovoljavaju jednadžbi $x\,(x + p) = 0$ bit će one, koje udovoljavaju jednadžbi $x = 0$ i jednadžbi $x + p = 0$. Te su vrijednosti $x = 0$ i $x = -p$. Označit ćemo $x_1 = 0$, $x_2 = -p$.

Primjer. Neka se razriješi jednadžba $x^2 + 6x = 0$. Dobivamo $x\,(x + 6) = 0$. Odatle izlazi $x = 0$, $x + 6 = 0$. T. j. $x_1 = 0$, $x_2 = -6$.

γ) Ako je b i c jednako nuli, jednadžba $x^2 + px + q = 0$ poprima oblik

$$x^2 = 0.$$

Toj jednadžbi udovoljava jedina vrijednost $x = 0$. Ipak kažemo, da ta jednadžba imade oba korijena jednaka nuli ili također jedan dvostruki korijen jednak nuli.

§ 15. **Rješavanje opće kvadratne jednadžbe.** Svaka je opća kvadratna jednadžba

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ekvivalentna s jednadžbom $x^2 + px + q = 0$, gdje je $p = \frac{b}{a}$, a $q = \frac{c}{a}$. Broj p jest *koeficijenat drugog člana jednadžbe*, a q *njezin treći član.*

Da razriješimo jednadžbu

$$x^2 + px + q = 0,$$

dodat ćemo lijevoj strani i oduzet od nje $\frac{p^2}{4}$. Time je ona prešla u jednadžbu

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = 0,$$

$$\text{ili } \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q.$$

Ta je jednadžba čista kvadratna, gdje je nepoznanica $x + \frac{p}{2}$. Izlazi dakle:

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$\text{i } x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Jednadžba $x^2 + px + q = 0$ ima 2 korijena:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},\ x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Oba korijena kvadratne jednadžbe $x^2 + px + q = 0$ dobivaju se, da se polovici koeficijenta drugog člana s protivnim predznakom jedamputa doda, a drugi puta od nje oduzme drugi korijen iz razlike, gdje je minuend jednak kvadratu polovice koeficijenta drugog člana, a suptrahend jednak trećem članu jednadžbe.

Priroda tih korijena zavisi o izrazu $\frac{p^2}{4} - q$, koji se zove *diskriminanta* kvadratne jednadžbe $x^2 + px + q = 0$.

Ako je:

1. $\frac{p^2}{4} - q > 0$, oba su korijena realna i različita.

2. $\frac{p^2}{4} - q = 0$, oba su korijena jednaka, a kvadratna jednadžba ima jedan dvostruki korijen $x = -\frac{p}{2}$.

3. $\frac{p^2}{4} - q < 0$. Oba su korijena konjugirano kompleksna.

Stavimo li u izraz za x_1 i x_2 mjesto p razlomak $\frac{b}{a}$, a mjesto q razlomak $\frac{c}{a}$, dobivamo za korijene kvadratne jednadžbe

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ ili također jednadžbe

$ax^2 + bx + c = 0$ ove izraze:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ i } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Sad je diskriminanta $b^2 - 4ac$.

Primjeri. 1. Neka se razriješi jednadžba

$$x^2 - 12x + 32 = 0.$$

Dobivamo: $x = 6 \pm \sqrt{36 - 32} = 6 \pm \sqrt{4}$; $x_1 = 6 + 2 = 8$, $x_2 = 6 - 2 = 4$.

2. Neka se razriješi jednadžba

$$x^2 - 10x + 41 = 0.$$

Nalazimo: $x = 5 \pm \sqrt{25 - 41} = 5 \pm \sqrt{-16}$;

$$x_1 = 5 + 4i,\quad x_2 = 5 - 4i.$$

3. Neka se razriješi jednadžba

$$25x^2 + 15x + 2 = 0.$$

Podijelimo tu jednadžbu s 25, dobivamo

$$x^2 + \frac{3}{5}x + \frac{2}{25} = 0.$$

Korijeni su te jednadžbe

$$x_1 = -\frac{3}{10} \pm \sqrt{\frac{9}{100} - \frac{2}{25}} = -\frac{3}{10} \pm \sqrt{\frac{9-8}{100}} = -\frac{3}{10} \pm \frac{1}{10};$$

$$x_1 = -\frac{2}{10} = -\frac{1}{5},\quad x_2 = -\frac{3}{10} - \frac{1}{10} = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}.$$

4. Primjer. Neka se razriješi jednadžba

$$(a^2 - b^2)\,x^2 - 2a^2bx + a^2b^2 = 0.$$

Podijelimo li tu jednadžbu koeficijentom od x^2, dobivamo ekvivalentnu jednadžbu

$$x^2 - \frac{2a^2b}{a^2 - b^2}x + \frac{a^2b^2}{a^2 - b^2} = 0.$$

Korijeni te jednadžbe jesu:

$$x_1 = \frac{a^2b}{a^2 - b^2} \pm \sqrt{\frac{a^4b^2 - a^2b^2\,(a^2 - b^2)}{(a^2 - b^2)^2}} = \frac{a^2b}{a^2 - b^2} \pm \frac{ab^2}{a^2 - b^2};$$

$$x_1 = \frac{ab\,(a+b)}{a^2 - b^2} = \frac{ab}{a-b},\quad x_2 = \frac{ab\,(a-b)}{a^2 - b^2} = \frac{ab}{a+b}.$$

5. Primjer. Za koje su vrijednosti od m oba korijena jednadžbe $mx^2 - 2\,(m - 2)x + m - 5 = 0$ realna?

Da korijeni kvadratne jednadžbe budu realni, treba da je njezina diskriminanta $b^2 - 4ac$ veća ili jednaka nuli. T. j. treba da bude

$$4\,(m - 2)^2 - 4\,m\,(m - 5) \geq 0,$$

podijelivši s 4 izlazi $m^2 - 4m + 4 - m^2 + 5\,m \geq 0$.

Dakle treba da je $m + 4 \geq 0$ ili $m \geq -4$.

Za sve vrijednosti od m veće od -4 korijeni gornje jednadžbe jesu realni. Ako je $m = -4$, oba su korijena jednaka $\frac{3}{2}$.

6. Primjer. Za koje su vrijednosti od m oba korijena jednadžbe $(m + 9)x^2 - (30 + m)x + m - 15 = 0$ jednaka?

Da korijeni te jednadžbe budu jednaki, treba da je diskriminanta

$$(30 + m)^2 - 4\,(m - 15)\,(m + 9) = 0.$$

Odatle izlazi $m^2 - 28\,m - 480 = 0.$

$$m_1 = 40,\quad m_2 = -12.$$

Za te vrijednosti od m jesu korijeni zadane jednadžbe jednaki. Za $m = -12$ lijeva je strana $-3\,(x + 3)^2$, a za $m = 40$ ona poprima oblik $(7x - 5)^2$.

7. Primjer. Neka se ispita, što se zbiva s korijenima jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$, kad α) a konvergira prema nuli, β) a i b konvergiraju prema nuli.

Oba se korijena te jednadžbe, dok je a različno od nule, mogu se pisati ovako:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}},$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2c}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

Ako sad a konvergira prema nuli, prvi se korijen približava vrijednosti $-\frac{c}{b}$ t. j. korijenu linearne jednadžbe $bx + c = 0$, a drugi korijen postaje beskonačno velik. Tako su na pr. korijeni jednadžbe $0{\cdot}001x^2 + 2x - 5 = 0$, $x_1 = 2{\cdot}496\ldots$, $x_2 = -2002{\cdot}496\ldots$; dok

su korijeni jednadžbe $0{\cdot}00000001x^2+2x-5=0, x_1=2{\cdot}499999996\ldots$, $x_2 = -20\,000\,002{\cdot}499999996\ldots$

Ako uz a i b konvergira prema nuli, razabira se, da i x_1 i x_2 postaju beskonačno veliki.

§ 16. Svojstva korijena kvadratne jednadžbe. Neka je zadana kvadratna jednadžba u normalnom obliku:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Korijeni te jednadžbe jesu:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},\; x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Zbrojimo li te jednadžbe dobivamo

$$x_1 + x_2 = -p.$$

Pomnožimo li ih među sobom, imamo

$$x_1x_2 = \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = q. \text{ T. j.}$$

Zbroj korijena kvadratne jednadžbe $x^2 + px + q = 0$ *jednak je koeficijentu drugoga člana s protivnim predznakom t. j. jednak je* $-p$; *umnožak korijena jednak je trećem članu t. j. jednak je* q.

Obrnuto, ako dva broja x_1 i x_2 zadovoljavaju relaciju $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$, ta dva broja jesu korijeni jednadžbe $x^2 + px + q = 0$. Jer ako izračunamo na pr. x_2 iz prve jednadžbe i uvrstimo dobivenu vrijednost u drugu jednadžbu, izlazi, da x_1 zadovoljava relaciju $x_1^2 + px_1 + q = 0$.

Zbroj je korijena jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$ jednak $-\frac{b}{a}$, a produkt je korijena te jednadžbe jednak $\frac{c}{a}$.

Primjeri. 1. Neka se napiše jednadžba, kojoj su korijeni $x_1 = \frac{3}{4}, x_2 = \frac{3}{5}$. Koeficijenat drugog člana jest $-\left(\frac{3}{4} + \frac{3}{5}\right) = -\frac{27}{20}$, treći je član $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{20}$. Zato je tražena jednadžba

$$x^2 - \frac{27}{20}x + \frac{9}{20} = 0 \text{ ili } 20x^2 - 27x + 9 = 0.$$

2. Neka se nađu dva broja, kojima je zbroj s i produkt p.

Traženi su brojevi korijeni kvadratne jednadžbe $x^2 - sx + p = 0$.

T. j. jedan je broj $x_1 = \frac{s + \sqrt{s^2 - 4p}}{2}$, drugi je $x_2 = \frac{s - \sqrt{s^2 - 4p}}{2}$.

Ti su brojevi realni samo onda, ako je $s^2 - 4p \geq 0$.

3. Neka se odredi zbroj kvadrata i kuba korijena jednadžbe $x^2 + px + q = 0$.

Budući da je $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$, $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)$, to je $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q$,

$$x_1^3 + x_2^3 = p^3 - 3q(-p) = p^3 + 3pq.$$

§ 17. Predznaci korijena kvadratne jednadžbe. Ako su korijeni kvadratne jednadžbe $x^2 + px + q = 0$ realni, može se ne razriješivši jednadžbe samo na temelju svojstava korijena odmah odrediti, kakovog su oni predznaka. Budući da je produkt korijena jednak q, to su korijeni istog znaka ili protivna znaka već prema tomu da li je $q > 0$ ili $q < 0$. Ako su korijeni istog znaka t. j. ako je $q > 0$, taj je znak jednak znaku njihova zbroja $-p$. Ako je dakle $-p > 0$ ili $p < 0$, oba su korijena pozitivna; ako je pak $-p < 0$ ili $p > 0$, oba su korijena negativna. Kad je $q < 0$, korijeni su protivna znaka; znak od $-p$ odlučuje, koji je korijen veći po apsolutnoj vrijednosti. Ako je $-p > 0$, pozitivni korijen ima veću apsolutnu vrijednost, ako je pak $-p < 0$, negativni je korijen veći po apsolutnoj vrijednosti. Ako je $p = 0$, korijeni su protivni. Ako je $q = 0$, jedan je korijen jednak nuli, a drugi je jednak zbroju $-p$. Ako je q jednako $\frac{p^2}{4}$, oba su korijena jednaka; jednadžba ima dvostruki korijen $x = -\frac{p}{2}$.

Cijela se ta diskusija može ovako sabrati:

$$\frac{p^2}{4} - q > 0, \begin{cases} q > 0, \begin{cases} p < 0, \text{ oba su korijena pozitivna.} \\ p > 0, \text{ oba su korijena negativna.} \end{cases} \\ q < 0, \begin{cases} p > 0, \text{ negat. korijen ima veću aps. vrijednost.} \\ p = 0, \text{ korijeni su protivni.} \\ p < 0, \text{ pozit. korijen ima veću aps. vrijednost.} \end{cases} \end{cases}$$

$$\frac{p^2}{4} - q = 0, \left\{ x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}; \text{ dvostruki korijen.} \right.$$

$$\frac{p^2}{4} - q < 0, \left\{ \text{korijeni su konjugirano kompleksni.} \right.$$

Naročito treba zapamtiti, ako je q negativno, da jednadžba $x^2 + px + q = 0$ ima uvijek 2 realna korijena protivna znaka.

Izvedi analognu diskusiju za jednadžbu $ax^2 + bx + c = 0$!

Primjeri. 1. Neka se odredi, kakove vrijednosti treba dati broju m, da oba korijena jednadžbe $x^2 + 4x - m - 2 = 0$ budu negativna.

Budući da je zbroj korijena jednak -4, treba još da su ispunjeni ovi uvjeti: diskriminanta $16 - 4\,(-m-2) \geqq 0$ i $-m-2$ (produkt korijena) > 0. Iz prve nejednadžbe izlazi $m \geqq -6$, iz druge nejednadžbe $m < -2$. Objema nejednadžbama jest udovoljeno, kad je $-6 \leqq m < -2$.

2. Neka se diskutiraju korijeni jednadžbe:

$$x^2 - 2\,(m+2)\,x + m^2 - 9 = 0,$$

kad se m mijenja od $-\infty$ do $+\infty$.

Da korijeni te jednadžbe budu realni, treba prije svega da je ispunjen uvjet, da je diskriminanta:

$$D = 4\,(m+2)^2 - 4\,(m^2-9) \geqq 0 \text{ ili } 4m \geqq -13,\quad m \geqq -\frac{13}{4}.$$

Da uzmognemo razabrati, kako se korijeni mijenjaju, kad se m mijenja, razmotrimo izraze za zbroj korijena S i za produkt korijena P. Nalazimo:

$$S = 2\,(m+2),\quad P = m^2 - 9 = (m+3)\,(m-3).$$

Zbroj se korijena poništava mijenjajući znak za $m = -2$, a produkt se korijena poništava mijenjajući znak za vrijednosti $m = -3$, $m = 3$.

Karakteristične su vrijednosti od m poređane rastući ove:

$$-\frac{13}{4},\ -3,\ -2,\ 3.$$

S obzirom na te karakteristične vrijednosti treba razmatrati ove slučajeve:

1. $-\infty < m < -\frac{13}{4}$. Diskriminanta je negativna, korijeni nisu realni.

2. $m = -\frac{13}{4}$. Diskriminanta je jednaka nuli, jednadžba ima dvostruki korijen $x = m + 2 = -\frac{5}{4}$.

3. $-\frac{13}{4} < m < -3$. Zbroj je korijena negativan, produkt je korijena pozitivan. Oba su korijena negativna, t. j. $x_1{}^* < x_2 < 0$.

4. $m = -3$. Produkt je korijena jednak nuli; jedan je korijen jednak nuli; drugi je jednak zbroju $2\,(m+2) = 2\,(-3+2) = -2$. T. j. $x_1 = -2$, $x_2 = 0$.

5. $-3 < m < -2$. Produkt je korijena negativan, korijeni su protivno označeni; kako je njihov zbroj negativan, negativni korijen ima veću apsolutnu vrijednost. T. j. $x_1 < 0 < x_2$, $|x_1| > x_2$.

* Ovdje s x_1 označujemo manji korijen.

6. $m = -2$. Produkt je korijen negativan, ali njihov je zbroj jednak nuli; korijeni su dakle protivni. Budući da je produkt korijena jednak $m^2 - 9 = -5$, to je $x_1 = -\sqrt{5}$, $x_2 = \sqrt{5}$.

7. $-2 < m < 3$. Produkt je korijena još uvijek negativan, ali zbroj korijena jest pozitivan. Pozitivni korijen ima dakle veću apsolutnu vrijednost, t. j. $x_1 < 0 < x_2$, $x_2 > |x_1|$.

8. $m = 3$. Produkt je korijena opet jednak nuli, jedan je korijen jednak nuli, drugi je jednak zbroju $2\,(m+2) = 10$. T. j. $x_1 = 0$, $x_2 = 10$.

9. $3 < m < \infty$. I zbroj i produkt korijena su pozitivni. Oba su korijena dakle pozitivna. T. j. $0 < x_1 < x_2$.

Zadaci. Razriješi ove čiste kvadratne jednadžbe:

1. *a)* $\frac{x^2}{2} + 18 = 2610$, *b)* $5x^2 = 11{\cdot}25$, *c)* $11x^2 = 161051$.

2. *a)* $\frac{3}{4}\,x^2 = 48$, *b)* $9\,(x+3)^2 = 2025$, *c)* $6\,(x^2+1) = 15006$.

3. *a)* $ax^2 + b = cx^2 + d$, *b)* $(a+x)^2 = b^2$, *c)* $ax^2 - bx^2 = c$.

4. *a)* $(2x+3)\,(2x-3) + (x+4)\,(x-4) = 0$,
b) $(3x+5)\,(4x-6) + (3x-5)\,(4x+6) = 156$,
c) $(3x-4)^2 + (3x+4)^2 - (2x-5)\,(2x+5) = 561$.

5. *a)* $m\,(x+a)^2 - n\,(x+a)^2 = b$, *b)* $(m+nx)^2 + (mx-n)^2 = 2\,(m^2x^2 + n^2)$.

6. *a)* $\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} = \frac{50}{x^2-9}$, *b)* $\frac{x+4}{x-4} = \frac{x+8}{8-x}$.

7. *a)* $\frac{x+a}{x-a} + \frac{x-a}{x+a} = 6$, *b)* $\frac{a+x}{a-x} = \frac{x+b}{x-b}$.

8. *a)* $\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1} = \frac{9}{4}$, *b)* $\frac{x+5}{x-5} + \frac{x-5}{x+5} = \frac{37}{6}$.

9. *a)* $ax : (b+x) = (b-x) : x$, *b)* $a : (b+x) = (b-x) : c$.

Uz koje uvjete prelaze ove jednadžbe:

10. *a)* $\frac{x+m}{x+n} = \frac{x+p}{q-x}$, *b)* $\frac{mx+a}{nx+b} = \frac{px+c}{qx+d}$ u čiste kvadratne jednadžbe?

Odredi srednju geom. proporcionalu između:

a) 3 i 48, *b)* 9 i 16, *c)* 27 i 12, *d)* $a\,(a+b)$ i $a\,(a-b)$,
e) $\frac{a^2-b^2}{ab}$ i $\frac{a+b}{a^2b-ab^2}$, *f)* $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ i $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Razriješi ove iracionalne jednadžbe:

11. *a)* $\sqrt{52+8x} = x+4$, *b)* $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1} = \sqrt{3x+3}$.

12. *a)* $\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x} = b$, *b)* $\sqrt{65+x} - \sqrt{65-x} = 2$.

13. *a)* $x + \sqrt{x^2-9} = \frac{36}{\sqrt{x^2-9}}$, *b)* $x + \sqrt{x^2-a} = \frac{b}{\sqrt{x^2-a}}$.

14. *a)* $\sqrt[3]{36+x} + \sqrt[3]{36-x} = 6$, *b)* $\sqrt[3]{m+x} + \sqrt[3]{m-x} = \sqrt[3]{2m}$.

Uz koji su uvjet ove jednadžbe:

15. *a)* $\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b} = \sqrt{x+c}$, *b)* $\sqrt{ax+b} + \sqrt{cx+d} = \sqrt{ex+f}$ čiste kvadratne jednadžbe?

Razriješi ove kvadratne jednadžbe:

16. *a)* $x^2+9x+20=0$, *b)* $x^2-3x-10=0$, *c)* $x^2+x-12=0$,
d) $x^2-10x+25=0$, *e)* $x^2-x-6=0$, *f)* $x^2-4x+5=0$.
g) $x^2-6x+8=0$, *h)* $x^2-10x+22=0$,
i) $x^2-4x-96=0$, *k)* $x^2-8x+11=0$,
l) $x^2-4x+5=0$, *m)* $x^2+6x+45=0$.

17. *a)* $x^2+\frac{1}{6}x-\frac{5}{9}=0$, *b)* $x^2-\frac{2}{5}x=\frac{3}{25}$, *c)* $6x^2-7x+2=0$.

18. *a)* $18x^2-27x+10=0$, *b)* $15x^2+23x-28=0$,
c) $5x^2+\frac{4}{3}x-\frac{4}{15}=0$, *d)* $x^2-\frac{8}{3}x+1=0$.

19. *a)* $30x^2+11x-30=0$, *b)* $25x^2-30x+7=0$,
c) $\frac{10}{3}x^2-9x+6=0$, *d)* $x^2-\frac{10}{3}x+\frac{41}{9}=0$.

20. *a)* $x^2+2{\cdot}5x+1=0$, *b)* $15x^2-x-6=0$, *c)* $3x^2+2x-8=0$, *d)* $126x^2-85x+14=0$.

21. *a)* $(x-a)(x-b)=(a+2b)(2a+b)$,
b) $(a-x)^2+(b-x)^2=(a-b)^2$,
c) $(a-b)^2x^2+2(a^2+b^2)x+(a+b)^2=0$.

22. *a)* $(a+x)^2+(b+x)^2=5(a-b)^2$,
b) $x^2-2ax+a^2-b^2=0$.

23. *a)* $abx^2-(a^2+b^2)x+ab=0$,
b) $a^2x^2-2a^2x+a^4-1=0$,
c) $a(a+1)x^2+x-a(a-1)=0$.

24. *a)* $x^2-2(a^2+b^2)x+(a^2-b^2)^2=0$,
b) $a^2b^2x^2-2(a^2+b^2)x+4=0$,
c) $(a^2+a-2)x^2+(2a^2+a+3)x+a^2-1=0$.

25. *a)* $(x-5)(x-6)=0$, *b)* $(3x-4)(4x-5)=0$.

26. $(3x-4)(5x+3)-(2x-1)(5x-8)=100$.

27. $(2x-7)(3x-10)-(2x+7)(x-6)=200$.

28. $\left(3x-3\frac{1}{2}\right):\left(3x-\frac{1}{6}\right)=\left(4x-2\frac{1}{4}\right):\left(5x-\frac{3}{2}\right)$.

29. *a)* $(3x+5)^2+(5x-1)^2=80$,
b) $(4x-1)^2-(2x+3)^2=40$.

30. $(8x+5)^2+(7x+6)^2=(11x+7)^2$.

31. *a)* $\frac{5x+9}{4}-\frac{4x+3}{x+2}=\frac{7x-9}{4}$,
b) $\frac{2x-7}{3}-\frac{x+1}{x-5}=\frac{2x-1}{7}$.

32. *a)* $\frac{2x+3}{x-2}+\frac{x-4}{x+1}=\frac{3x+1}{x-1}$,
b) $\frac{x+3}{x-2}+\frac{x-4}{x-1}=\frac{2x+6}{x+1}$.

33. *a)* $\frac{3x-1}{x-2}-\frac{2x-2}{x-7}=\frac{38}{5}$, *b)* $\frac{11x-3}{7x+1}-\frac{9x-1}{9x+7}=\frac{1}{2}$.

34. *a)* $\frac{x}{x-a}+\frac{x-a}{x}=\frac{5}{2}$, *b)* $\frac{a-b}{x-2a}+\frac{x+4b}{a+b}=4$.

35. *a)* $\frac{x+2}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}=\frac{40}{21}$, *b)* $\frac{2x-1}{x+1}-\frac{x-7}{x-1}=4-\frac{3x-1}{x+2}$.

36. *a)* $\frac{x}{x-6}-\frac{1}{2}=\frac{x}{6}+\frac{x+6}{6-x}$,
b) $\frac{x^2}{(m+n)^2}-\frac{4mnx}{(m+n)^2}-(m-n)^2=0$.

37. *a)* $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a+2x}=0$, *b)* $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x\ b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

38. *a)* $\frac{x+a}{x-a}+\frac{4x-5a}{x+5a}=3$, *b)* $\frac{a}{x-b}+\frac{b}{x-a}=2$.

39. *a)* $0{\cdot}01x^2-2x-3=0$, *b)* $0{\cdot}000001x^2-2x-3=0$.

40. *a)* $2x-\sqrt{x}=6$, *b)* $x-2\sqrt{x+2}=1$,
c) $\sqrt{2x+7}+\sqrt{x}=8$, *d)* $\sqrt{5x+6}-\sqrt{7x-5}=1$.

41. *a)* $\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{10x-1}$,
b) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+8}=\sqrt{x+24}$.

42. *a)* $2\sqrt{5x-6}-\sqrt{2x+3}=\sqrt{4x-3}$,
b) $\sqrt{5x+5+6\sqrt{3x+4}}=7$.

43. *a)* $x+\sqrt{x+m}=-m$, *b)* $\sqrt{21+x}=\sqrt{28+2x}-1$,
c) $\sqrt{m^2x^2+1}=x-\frac{m}{2}$.

44. *a)* $\sqrt{5a+x}+\sqrt{5a-x}=\frac{12a}{\sqrt{5a+x}}$,

b) $\sqrt{7x+2}-\sqrt{13-2x}=\sqrt{x-1}$.

45. $\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}=\sqrt{c+x}$.

46. Neka se napiše jednadžba, kojoj su korijeni:

a) $4, -3$, *b)* $-3, -2$, *c)* $-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$, *d)* $2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}$,

e) a^2+b^2, a^2-b^2, *f)* $3+i, 3-i$, *g)* $4+5i, 4-5i$,

h) $\frac{a+b}{a-b}, \frac{a-b}{a+b}$, *i)* $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$,

k) $\frac{a-1}{a}, -\frac{a}{a+1}$; *e)* $\frac{a-1}{a}, -\frac{a+1}{a+2}$.

47. Odredi predznake korijena ne razriješivši jednadžbe:
a) $9x^2+9x+2=0$, *b)* $x^2-5x+6=0$, *c)* $x^2-4x+4=0$,
d) $3x^2-4x-1=0$, *e)* $12x^2-x-1=0$.

48. Ako su x_1 i x_2 korijeni jednadžbe $ax^2+bx+c=0$, izračunaj kao funkciju od a, b, c vrijednosti od

a) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$, *b)* $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$, *c)* $\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}$, *d)* $x_1^4+x_2^4$,

e) $4x_1x_2^2+4x_1^2x_2+2x_1x_2-x_1^3-x_2^3$.

49. Neka se odredi kvadratna jednadžba, kojoj su korijeni *a)* protivna znaka, *b)* recipročne vrijednosti, *c)* za d veći, *d)* d puta veći od korijena jednadžbe $ax^2+bx+c=0$, *e)* kvadrati korijena, *f)* recipročne vrijednosti kvadrata korijena iste jednadžbe.

50. Koji uvjet mora biti ispunjen, da korijen jednadžbe $mx+n$ bude također korijen jednadžbe $x^2+px+q=0$?

51. U jednadžbi $x^2+mx+12=0$ odredi m tako, da bude *a)* jedan korijen 3 puta veći od drugoga, *b)* jedan korijen za 4 veći od drugoga, *c)* jedan korijen n puta veći od drugoga, *d)* jedan korijen za n veći od drugoga.

52. Napiši kvadratnu jednadžbu, kojoj su korijeni zbroj i produkt korijena jednadžbe $ax^2+bx+c=0$.

53. Ako su x_1 i x_2 korijeni jednadžbe $ax^2+bx+c=0$, napiši jednadžbu, kojoj su korijeni

a) $1-\frac{2}{x_1}$ i $1-\frac{2}{x_2}$, *b)* x_1^3 i x_2^3, *c)* $\frac{x_1^2}{x_2}+1, \frac{x_2^2}{x_1}+1$.

54. Koju vrijednost treba dati broju m, da korijeni jednadžbe $8x^2-(m-1)x+m-7=0$

budu *a)* jednaki, *b)* protivni *c)* recipročni? Za koju je vrijednost od m jedan od korijena jednak nuli?

55. Koja relacija mora postojati između koeficijenata jednadžbe $ax^2+bx+c=0$, da korijeni te jednadžbe zadovoljavaju relaciju $rx_1+sx_2=t$?

56. Odredi m tako, da korijeni jednadžbe *b)* $(m-1)x^2-(3m+4)x+12m-3=0$ zadovoljavaju relaciju $4x_1-5x_2=13$, *b)* $(m-2)x^2-2(m-3)x-2(m+2)=0$ zadovoljavaju relaciju $3x_1+2x_2=0$.

57. Odredi u jednadžbi $x^2+5x+m=0$ m tako, da bude

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{73}{576}.$$

58. Odredi u jednadžbi $x^2+mx-45=0$ m tako, da bude

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{106}{2025}.$$

59. Za koju je vrijednost od m jedan korijen jednadžbe

a) $(m-4)x^2+2(m-9)x+2m+2=0$

triput veći od drugog, *b)* $2x^2-(2m+1)x+m^2-9m+39=0$ dvaput veći od drugoga, *c)* $9x^2-18(m-1)x-8m+24=0$ dvaput veći od drugoga, *d)* $(m+2)x^2-(7m+23)x+22m-26=0$ dvaput veći od drugoga?

60. Uz koji uvjet imadu jednadžbe

$$ax^2+bx+c=0,$$
$$a'x^2+b'x+c'=0$$

a) jedan, *b)* oba korijena zajednička?

61. Odredi m tako, da jednadžbe
a) $x^2-3x+(2m-4)=0$, $x^2-4x+(3m-5)=0$,
b) $x^2+mx+1=0$, $x^2+x+m=0$, *c)* $(1-2m)x^2-6mx-1=0$, $mx^2-x+1=0$ imadu jedan zajednički korijen i izračunaj taj korijen.

62. U jednadžbama $(l-1)x^2-(l+1)x+l=0$,

$$mx^2-(2m+1)x+m+1=0$$

odaberi l i m tako, da te jednadžbe imadu iste korijene i izračunaj te korijene.

63. Izračunaj m tako, da između korijena jednadžbe
a) $x^2+mx-8=0$ postoji relacija $x_1+3x_2+10=0$;
b) $x^2-2mx+3=0$ postoji relacija $(3x_1-1)(3x_2-1)=16$.

64. Ako S_n znači $x_1^n+x_2^n$ (x_1, x_2 jesu korijeni jednadžbe $ax^2+bx+c=0$), dokaži, da je općeno

$$aS_n+bS_{n-1}+cS_{n-2}=0$$

Izračunaj odatle S_3 S_4 S_5.

65. Pokaži, da je $S_{-n} = \frac{1}{x_1^n} + \frac{1}{x_2^n} = \frac{S_n}{(x_1 x_2)^n}$ (vidi zad. 64.). Izračunaj odatle S_{-1}, S_{-2}, S_{-3}, S_{-4}, S_{-5}.

66. U jednadžbi *a)* $x^2 + (m+1)x - 2 = 0$ odredi m tako, da zbroj kvadrata korijena bude jednak 5; *b)* $(m+2)x^2 - 2(m+1)x + m = 0$ odredi m tako, da zbroj kvadrata korijena bude jednak $\frac{10}{9}$; *c)* $2x^2 - (m+1)x + m + 3 = 0$ odredi m tako, da razlika korijena bude jednaka 1.

67. Za koje su vrijednosti od m oba korijena jednadžbe *a)* $(m+1)x^2 + (5m-3)x + 2m + 3 = 0$, *b)* $(m-5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0$, *c)* $(12m+7)x^2 - 3(14-3m)x + 11 - 3m = 0$ jednaka?

68. Kako se mijenjaju korijeni jednadžbe: *a)* $mx^2 + (2m+1)x + m - 3 = 0$, *b)* $(m-1)x^2 + 2x + (m-1) = 0$; *c)* $(m-5)x^2 - 2(m+3)x + m - 2 = 0$, *d)* $(m-3)x^2 - 2mx + m + 12 = 0$, *e)* $mx^2 - 2mx + m + 1 = 0$, *f)* $(m+2)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$, *g)* $x^2 - 2(m-3)x + m^2 - 4 = 0$, *h)* $x^2 - 2(m+4)x + m^2 - 9 = 0$, kad se m mijenja od $-\infty$ do $+\infty$?

§ 18. Sistem od kvadratne i linearne jednadžbe s 2 nepoznanice. Opći je oblik kvadratne jednadžbe s 2 nepoznanice:

1) $$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

Ta jednadžba imade *beskonačno* mnogo rješenja, jer svakoj vrijednosti od x odgovaraju po 2 vrijednosti od y i obrnuto. Da se dobije određeni broj rješenja, treba da je zadana još jedna jednadžba s jednom ili dvije nepoznanice, koje zajedno čine jedan sistem jednadžbi. Ovdje ćemo razmatrati slučaj, kad je ta jednadžba linearna t. j. oblika

2) $$kx + ly + m = 0.$$

Rješenje tog sistema dobit će se, da se uvrsti vrijednost od na pr. 3) $y = -\frac{m+kx}{l}$ u jednadžbu 1). Time će se dobiti kvadratna jednadžba s jednom nepoznanicom, koja daje dva korijena x_1 i x_2. Stavimo li onda vrijednost od x_1 i x_2 u jednadžbu 3), dobivamo 2 vrijednosti za y t. j. y_1 i y_2. Sistem od jedne kvadratne i jedne linearne jednadžbe imade dakle 2 rješenja x_1, y_1; x_2, y_2.

Primjer 1) Neka se razriješi sistem $3x^2 + 2y^2 + 2x - 20y - 13 = 0$,
$$x + y = 2.$$

Uvrstimo li vrijednost od $y = 2 - x$ u prvu jednadžbu i reduciramo li istoimene članove, dobivamo kvadratnu jednadžbu $5x^2 + 14x - 19 = 0$. Njezini su korijeni $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{19}{5}$. Iz $y = 2 - x$ izlazi dalje $y_1 = 1$, $y_2 = \frac{29}{5}$. Rješenje zadanog sistema jest dakle $x_1 = 1$ $y = 1$; $x_2 = -\frac{19}{5}$, $y_2 = \frac{29}{5}$.

2) $$x + y = a,$$
$$xy = b.$$

Taj se sistem može razriješiti tako, da se vrijednost za x ili y iz prve jednadžbe uvrsti u drugu, ali još jednostavnije će se on razriješiti, ako se napiše kvadratna jednadžba, kojoj su korijeni x i y. Ta jednadžba glasi:

$z^2 - az + b = 0$, jer je poznat zbroj korijena a i produkt korijena b. Razriješimo li tu jednadžbu, dobivamo

$z_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$. Onda je $x = z_1$, $y = z_2$ ili $x = z_2$, $y = z_1$.

3) Neka se razriješi sistem
$$x^2 + y^2 = b,$$
$$x + y = a.$$

Kvadriravši drugu jednadžbu i uzevši u obzir da je $x^2 + y^2 = b$, izlazi $2xy = a^2 - b$; $xy = \frac{a^2 - b}{2}$. Sad je poznato $x + y$ i xy, pa je time taj sistem sveden na sistem u primjeru 2.

4) Neka se razriješi sistem:
$$x^3 + y^3 = b,$$
$$x + y = a.$$

Kubiramo li drugu jednadžbu, dobivamo $x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = a^3$. Odatle izlazi $b + 3axy = a^3$ i $xy = \frac{a^3 - b}{3a}$. Time je opet taj sistem sveden na sistem u primjeru 2.

5) Neka se razriješi sistem $x + y, = a$, $x^4 + y^4 = b$. Kvadriranjem prve jednadžbe nalazimo $x^2 + y^2 = a^2 - 2xy$; ponovnim kvadriranjem izlazi $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = a^4 - 4a^2xy + 4x^2y^2$ ili $2x^2y^2 - 4a^2xy + a^4 - (x^4 + y^4) = 0$ ili $2x^2y^2 - 4a^2xy + a^4 - b = 0$. Ta je jednadžba kvadratna po xy. Dobivamo 2 vrijednosti $(xy)_1$ i $(xy)_2$. Time je opet zadani sistem sveden na sistem u primjeru 2.

Slično se može razriješiti i sistem $x + y = a$, $x^5 + y^5 = b$.

Zadaci. Neka se razriješe sistemi:

1. $x + y = 20$, $xy = 64$.

2. $x - y = 9$, $xy = 90$.

3. $x^2 + y^2 = 1818$, $x + y = 60$.

4. $x^2 + y^2 = 3546$, $x - y = 6$.

5. $x^2 - y^2 = a$, $x - y = b$.

6. $x^2 + y^2 = 20$, $\frac{x}{y} = 2$.

7. $x + y = \frac{5}{2}$, $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{17}{4}$.

8. $x^2 + y^2 + x + y = 62$, $2x - 5y = 4$.

9. $2x + 3y = 9,$
$5x^2 - 7y^2 = -16\frac{3}{4}.$

10. $x^2 - y^2 + 3xy - y = 88,$
$x + y = 10.$

11. $2x + 3y = 19,$
$2x^2 + 3y^2 = 77.$

12. $x^2 + y^2 = -xy + 4,$
$x - y = 4.$

13. $x^2 - y^2 + xy = 76,$
$x + y = 14.$

14. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a,$
$x + y = b.$

15. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{12}.$
$x - y = 1.$

16. $\frac{3x + y}{5x - 6y} = -27,$
$x^2 - y^2 = 13,$

17. $9y^2 + 4x^2 - 18y - 24x + 9 = 0,$
$3y - 2x - 3 = 0.$

18. $x^2 + 3xy - 5x + 7y = 53,$
$2x - 5y + 7 = 0.$

19. $\frac{2x + y + 1}{x - 2y + 1} = \frac{8}{3},$
$x^2 - 3xy + y^2 = 5.$

20. $(3x - 2y)^2 + (2x - 3y)^2 = 82,$
$5x - 4y = 13.$

21. $x + 1 = 2(y + 1),$
$x^2 + 1 = 5(y^2 + 1).$

22. $x^2 - y^2 - 3xy + y + 196 = 0,$
$x + y = 18.$

23. $x^2 + 4y^2 + 3xy - 5x - 68 = 0,\ x + 2y - 10 = 0.$

24. $4x^2 - 3y^2 - xy + 5y - 88 = 0,\ 2x - y - 8 = 0.$

25. $3x^2 - 4xy + 2y^2 - 3x + 2y - 76 = 0,\ 2x - 3y = -3.$

26. $x + y + \sqrt{x + y} = 20,$
$x^2 - y^2 = 96.$

27. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$
$x + y = 1.$

28. $ax^2 + by^2 = c^2,$
$ax + by = c.$

29. $x^3 + y^3 = 35,$
$x + y = 5.$

30. $x^3 - y^3 = 37,$
$x - y = 1.$

31. $x^4 + y^4 = 272,$
$x + y = 6.$

32. $x^4 + y^4 = 706,$
$x - y = 2.$

33. $x^4 + y^4 = 34xy,$
$x + y = 6.$

34. $x^5 + y^5 = 781,$
$x + y = 1.$

§ 19. Problemi drugog stepena. Neki je problem *drugog stepena*, kad njegovo rješenje dovodi do jednadžbe drugog stepena ili do jednadžbe, koja se može svesti na drugi stepen. Kao kod problema prvog stepena obuhvaća i razrješavanje problema drugog stepena ova tri glavna dijela: izražavanje problema jednadžbom, razrješenje postavljene jednadžbe i diskusiju rješenja.

Kod diskusije rješenja treba ponajprije odrediti uvjet, uz koji su korijeni realni t. j. kojoj relaciji moraju zadovoljavati zadane veličine, da rješenje bude moguće.

Priroda problema može često nametati nepoznanici neke posebne uvjete; tako na pr. nepoznanice u izvjesnim zadacima moraju biti cijeli brojevi, često samo pozitivni ili se opet moraju nalaziti između određenih granica i t. d.

Kad je određen uvjet, uz koji su korijeni realni, treba ispitati, da li nađeni korijeni problemu zaista udovoljavaju; korijene, koji zadatku ne udovoljavaju, treba odbaciti. Tako će se moći zaključiti, da li problem ima samo jedno ili više rješenja.

Primjeri. 1. Neka se odredi pravokutni trokut, komu su stranice cijeli brojevi, koji slijede uzastopce.

Ako je x najmanja stranica traženog pravokutnog trokuta, ostale stranice jesu $x + 1$ i $x + 2$. Budući da je $x + 2$ hipotenuza, to postoji relacija:

$$(x + 2)^2 = x^2 + (x + 1)^2.$$

Odatle izlazi kvadratna jednadžba $x^2 - 2x - 3 = 0$. Njezini su korijeni $x_1 = 3$, $x_2 = -1$. Kako stranice pravokutnog trokuta moraju biti pozitivne, negativni se korijen ima odbaciti. Tražene stranice jesu dakle: 3, 4, 5.

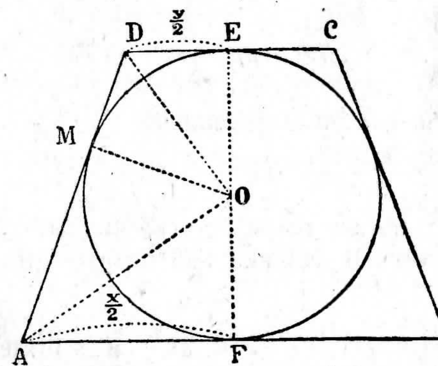
2. Neka se odredi mnogokut, koji imade n diagonala.

Broj diagonala mnogokuta s x stranica jest $\frac{x(x-3)}{2}$. Zato treba

da je $\frac{x(x-3)}{2} = n.$

Odatle izlazi $x^2 - 3x - 2n = 0$ i $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 8n}}{2}$.

Razabira se, da za n izlazi jedna pozitivna, a druga negativna vrijednost. Negativna se vrijednost ima odbaciti, a pozitivna odgovara problemu onda i samo onda, kad je $9 + 8n$ potpuni kvadrat neparnog broja. To je za vrijednost od n na pr. $n = 2$, 5, 9, 14, 20, 27, 35, 44...



Sl. 2.

3. Kružnici polumjera r neka se opiše trapez zadana opsega $2s$.

Neka je $ABCD$ traženi trapez i EF promjer okomit na bazama. Trapez bit će poznat, ako su nam poznate njegove baze $AB = x$ i $CD = y$. Opseg trapeza jest onda $2s = 2x + 2y$.

Iz pravokutnog trokuta OAD izlazi dalje

$$\overline{OM}^2 = \overline{AM} \cdot \overline{DM} \text{ ili } r^2 = \frac{x}{2} \cdot \frac{y}{2} = \frac{xy}{4} \text{ ili } xy = 4r^2.$$

Treba dakle razriješiti sistem:

$$x + y = s,$$
$$xy = 4r^2.$$

Prema tome su x i y korijeni kvadrátne jednadžbe:

$$z^2 - sz + 4r^2 = 0.$$

Da problem bude moguć, treba da su korijeni te jednadžbe realni i pozitivni. Ako su korijeni realni t. j. ako je ispunjen uvjet $s^2 - 16r^2 \geqq 0$, oni su pozitivni, jer je njihov zbroj pozitivan i njihov produkt pozitivan. Iz $s^2 - 16r^2 \geqq 0$ izlazi dalje $(s + 4r) \cdot (s - 4r) \geqq 0$. Kako je $s + 4r$ uvijek pozitivno, treba da je $s - 4r \geqq 0$ ili $s \geqq 4r$. U tom slučaju imamo

$$x = \frac{s}{2} + \frac{\sqrt{s^2 - 16r^2}}{2},\ y = \frac{s}{2} - \frac{\sqrt{s^2 - 16r^2}}{2} \text{ ili obrnuto.}$$

Ako je napose $s = 4r$ t. j. ako opseg poprima najmanju vrijednost, što je uopće može poprimiti, oba su korijena jednaka ili $x = y = \frac{s}{2} = \frac{4r}{2} = 2r$. Trapez prelazi dakle u tom slučaju u kvadrat.

4. U pravokutnom je trokutu hipotenuza jednak c, a zbroj obiju kateta jednak je s. Kolike su katete?

Ako su tražene katete x i y, to je

$$x^2 + y^2 = c^2,$$
$$x + y = s.$$

Iz prve jednadžbe izlazi $(x + y)^2 - 2xy = c^2$. Dakle je

$$s^2 - 2xy = c^2 \text{ t. j.}$$
$$xy = \frac{s^2 - c^2}{2}.$$

Prema tomu su x i y korijeni kvadratne jednadžbe

$$z^2 - sz + \frac{s^2 - c^2}{2} = 0.$$

Korijeni te jednadžbe treba da su realni i pozitivni. Zato je potrebno, da diskriminanta bude veća ili jednaka nuli i zbroj i produkt korijena da je pozitivan.

Iz $s^2 - 4\,\frac{s^2 - c^2}{2} \geqq 0$ izlazi $2c^2 - s^2 \geqq 0$, $s^2 \leqq 2c^2$ ili jer su c i s pozitivne veličine, $s \leqq c\sqrt{2}$.

Zbroj s jest pozitivan; da produkt bude pozitivan, treba da je $s^2 - c^2 > 0$ ili $s^2 > c^2$, t. j. $c < s$.

Izlazi dakle kao uvjet, da su korijeni realni i pozitivni

$$c < s \leqq c\sqrt{2}.$$

Ako je udovoljeno tom uvjetu, vrijednosti su korijena

$$x = \frac{s + \sqrt{2c^2 - s^2}}{2},\ y = \frac{s - \sqrt{2c^2 - s^2}}{2} \text{ ili obrnuto.}$$

Oba dobivena pravokutna trokuta jesu sukladna.

Ako je $s = c\sqrt{2}$, oba su korijena jednaka, zato je

$$x = y = \frac{s}{2} = \frac{c}{2}\sqrt{2}.$$

Pravokutni trokut jest istokračan.

Zadaci. *S jednom nepoznanicom.*

1. Za koji broj treba svaki faktor produkta $24 \cdot 30$ uvećati, da se produkt uveća za 1120?

2. Kojim brojem treba podijeliti broj a (96), da kvocijent bude za b (4) veći od divizora?

3. Rastavi broj a (12) u dva dijela tako, da je veći dio srednja geometrijska proporcionala između čitavog broja i manjeg dijela.

4. Rastavi a (48) u 2 pribrojnika, kojih je produkt b (432).

5. Razlika između nekog broja i njegove recipročne vrijednosti jest d $\left(\frac{7}{12}\right)$. Koji je to broj?

6. Broj a (96) rastavi u 2 faktora, kojih je razlika b (10).

7. Zbroj dvaju brojeva jest a (18), zbroj njihovih recipročnih vrijednosti b $\left(\frac{1}{4}\right)$. Koji su to brojevi?

8. Broj a (30) rastavi u 2 faktora, kojima je zbroj b (17).

9. Nazivnik je razlomka za m (3) veći od brojnika. Uveća li se brojnik za n (5) i umanji li se nazivnik za p (2), vrijednost novog razlomka jest r (4) puta tolika kolika prvog. Koji je to razlomak?

10. Brojnik razlomka jest za m (1) veći od nazivnika. Umanji li se razlomak za svoju recipročnu vrijednost, dobivamo n $\left(\frac{5}{6}\right)$. Koji je to razlomak?

11. Podijelimo li dvoznamenkasti broj, komu je zbroj znamenaka 9, produktom tih znamenaka, dobivamo kvocijent 2 i ostatak 5. Koji je to broj?

12. U dvoznamenkastom je broju znamenka desetica za 2 veća od znamenke jedinica. Pomnožimo li taj broj sa zbrojem njegovih znamenaka, dobije se 900. Koji je to broj?

13. Dva zidara izgrade zid za a (18) dana. Koliko bi dana trebao svaki radnik napose, ako drugi treba b (27) dana više negoli prvi?

14. Rezervoar se može napuniti dvjema cijevima za a (3) sata; prva cijev treba b (8) sati duže negoli druga cijev. Koliko treba svaka cijev napose?

15. A izađe s nekom određenom svotom a (6) dana duže negoli B, a obojica zajedno izdrže s njom b $\left(13\frac{1}{3}\right)$ dana. Kako bi dugo A sam mogao s tom svotom izaći?

16. Među određeni broj osoba razdijeli se a (2000) d; da je bilo b (30) osoba više, dobila bi svaka c (15) d manje. Koliko je bilo osoba?

16a. Više učenika hoće da kupe nogometnu loptu za 240 dinara. U posljednji se čas javi još 5 učenika tako, da svaki treba da plati 4 dinara manje. Koliko je isprva bilo igrača?

17. Cijevi A, B napune rezervoar za $4\frac{1}{2}$ sata nakon što je cijev A sama bila otvorena $2\frac{1}{2}$ sata. Za koje bi vrijeme napunila rezervoar svaka cijev, ako cijev B treba za to 5 sati više negoli cijev A?

18. Majka isprede zajedno sa svojom kćeri određenu množinu konca za a $\left(\frac{15}{2}\right)$ dana. Za koliko bi dana majka sama isprela taj konac, ako ona treba za to b (8) dana manje negoli kći?

19. Dva glasnika A, B, koja su udaljena za d (90) km, pođu jedan drugome nasusret, te se sastanu nakon t (10) sati. U kojem vremenu prevali svaki 1 km, ako A treba za to 3 minute više negoli B?

20. Osobni i brzi vlak krenu jedan drugome nasusret, te se sastanu nakon $\frac{3}{2}$ sata. U kojem bi vremenu svaki prevalio čitav put, ako osobni vlak treba za to $\frac{5}{4}$ sati više negoli brzi?

21. Dva jahača jašu u kružnici počevši od A u protivnom smjeru, te se sastanu nakon 70 sekundi. U kojem bi vremenu projašio svaki čitav put, ako drugi treba za to 48 sekundi više negoli prvi?

22. Dva se prijatelja sastanu na pravokutnom raskršću; prvi prevali svake minute 60 m, drugi 80 m; kad će jedan od drugog biti udaljeni 10 km?

23. Automobil bi prevalio put od 240 km za 1 sat manje, kad bi svaki sat prevalio 12 km više. Koliko vremena treba da automobil prevali taj put?

24. Tijelo A nalazi se na kraku pravog kuta za a udaljeno od vrha, te se giba jednolikom brzinom b prema vrhu. Tijelo B nalazi se na drugom kraku udaljeno od vrha za b, te se giba jednolikom brzinom a od vrha. Kad je njihova udaljenost d?

25. U zdenac pusti netko kamen i nakon t (4) sekunde čuje, kako je kamen udario. Koliko je dubok zdenac, ako je akceleracija sile teže $g = 9{,}81$ m i brzina zvuka 333 m u sekundi?

26. Opseg je pravokutnika $2s$ (92 m), površina p (480 m^2). Kolike su stranice?

27. U pravokutnom je trokutu razlika kateta d (14 m), a hipotenuza je za l (2m) duža od veće katete. Kolike su stranice tog trokuta?

28. Opseg je istokračnog trokuta $2s = 100$ cm, a osnovka je za $d = 2$ cm duža od visine. Kolika je visina? Kolike su stranice trokuta?

29. U krugu polumjera r (50 cm) jest tetiva za d (20 cm) veća od njezine udaljenosti od središta. Kolika je tetiva?

30. U rombu sa stranicom a (41 cm) obje se dijagonale razlikuju za d (62 cm). Kolike su dijagonale?

31. Površina je romba p (108 m^2), razlika dijagonala d (6 m). Kolike su dijagonale, kolika je stranica?

S dvije nepoznanice.

32. Odredi dva broja, kojih je razlika d (5) i produkt p (300).

33. Rastavi broj a (50) u dva pribrojnika, da je zbroj njihovih kvadrata b (1252).

34. Zbroj znamenaka dvoznamenkasta broja jest 11. Pomnoži li se taj broj s brojem, koji nastane zamjenom njegovih znamenaka, dobivamo 3640. Koji je to broj?

35. Brojnik je razlomka za a (7) manji od nazivnika. Ako se brojnik umanji za b (8), a nazivnik za isto toliko uveća, novi je razlomak c-tina $\left(\frac{27}{2}\right)$ pređašnjega. Koji je taj?

36. Dvije cijevi, ako se istodobno otvore, napune rezervoar za a (2·4) sata; koliko treba svaka od njih, ako druga cijev sama napuni rezervoar za b (2) sata manje negoli prva?

37. Oko kružnice polumjera r (16 cm) neka se opiše romb zadane površine p (1280 cm^2).

38. Kružnici polumjera r neka se upiše pravokutnik zadanog opsega $2\ s$.

39. Neka se odrede katete pravokutnog trokuta, komu je opseg $2\ s$ (36 cm) i hipotenuza c (15 cm).

40. U krajnjim točkama promjera $AB = 2r$ (4 cm) polukruga povuku se tangente. Kako će se povući tangenta CD na taj polukrug, da površina trapeza $ABCD$ bude jednaka p (10 cm^2)?

41. Razlika kateta pravokutnog trokuta jest d (21 cm), hipotenuza jednaka je c (39 cm). Kolike su katete?

42. Razlika kateta pravokutnog trokuta jest d (1 cm), površina jest p (210 cm^2). Kolike su katete?

43. Neka se odrede stranice pravokutnog trokuta, ako je njegov opseg $2s = 24\ cm$, a polumjer upisane kružnice $\rho = 2\ cm$.

44. Neka se odrede stranice pravokutnog troknta, kome je površina jednaka $p = 30\ cm^2$ i polumjer upisane kružnice $\rho = 2\ cm$.

45. Na bazi AB zadanog trokuta ABC neka se odredi točka M tako, da je površina paralelograma, koji nastaje, ako se kroz M povuku paralele s AC i BC jednaka polovini površine zadanog trokuta.

46. Kružnici polumjera ρ opiši trapez zadane površine p.

47. U krug polumjera $r = 1\ cm$ upiši istokračni trokut, kome je zbroj od baze i visine jednak $l = 3\ cm$.

48. U polukrug promjera $AB = 2r$ upiši istokračni trapez $ABCD$, kome je zbroj baza jednak zbroju drugih dviju stranica.

49. U trokutu ABC poznata je stranica $AB = c$, zbroj $AC + BC = 2c$ i težišnica $CD = m$. Kolike su stranice AC i BC?

50. Koliki su bridovi pravilne trostrane prizme, ako je njezina površina p i zbroj njezinih bridova s?

51. U zadani uspravni stožac upiši valjak zadanog *a)* plašta p, *b)* oplošja O.

III Poglavlje

Logaritmi

§ **20. Pojam logaritma.** Potenciranje dovodi na dvije inverzne operacije. Inverzna operacija, kojom se iz zadane potencije i eksponenta dobiva baza, jest radiciranje. Inverzna pak operacija, kojom se na pr. u jednadžbi $2^x = 8$ iz zadane potencije 8 i zadane baze 2 izračunava eksponent x, zove se *logaritmiranje*. Traženi se eksponent x zove *logaritam* od 8 s obzirom na bazu 2, te se označuje

$$x = {}^2log\ 8.$$

Razabiramo, da je $x = 3$, jer je $2^3 = 8$. Isto tako jest ${}^3log\ 81 = 4$, jer je $3^4 = 81$.

Logaritam jest eksponent, kojim se zadana baza mora potencirati, da se dobije zadana potencija.

Ako je $a^x = b$, to je $x = {}^alog\ b$.

Iz definicije logaritma izlaze ove dvije jednadžbe:

$$a^{a \log b} = b; \qquad {}^b log\ b^n = n.$$

Stavimo li u drugu od tih jednadžbi $n = 0$, i onda $n = 1$, dobivamo:

$${}^b log\ 1 = 0, \qquad {}^b log\ b = 1.$$

Te se jednadžbe mogu ovako riječima izraziti:

Logaritam od 1 jednak je nuli za bilo koju bazu.

Logaritam od baze s obzirom na tu bazu jednak je 1.

Bilješka. Da svagda postoji jedan jedini realni broj x, koji udovoljava jednadžbi $a^x = b$, gdje a i b znače pozitivne realne brojeve različite od 1, možemo se ovako uvjeriti:

Neka su brojevi a i b veći od 1, pa načinimo niz potencija a^0, a^1, a^2 . . . Može biti dvoje: ili je broj b jedan broj ovog niza ili se broj b može staviti između dva susjedna broja toga niza t. j. tako, da je

$$a^c < b < a^{c+1}.$$

Tad je $c < x < c + 1$.

Načinimo opet niz:

$$a^c,\ a^{c+\frac{1}{10}},\ a^{c+\frac{2}{10}},\ \ldots\ a^{c+\frac{9}{10}},\ a^{c+1}.$$

Opet će broj b biti ili jednak jednom članu tog niza ili će se nalaziti između dva susjedna člana tog niza t. j.

$$a^{c+\frac{c_1}{10}} < b < a^{c+\frac{c_1+1}{10}}.$$

$$\text{Tad je } c + \frac{c_1}{10} < x < c + \frac{c_1 + 1}{10}.$$

Opet ćemo načiniti niz

$$a^{c+\frac{c_1}{10}},\ a^{c+\frac{c_1}{10}+\frac{1}{10^2}},\ a^{c+\frac{c_1}{10}+\frac{2}{10^2}} \ldots,\ a^{c+\frac{c_1}{10}+\cdots+\frac{9}{10^2}}$$

i uspoređivati b s članovima tog niza. Nastavljajući tako dalje dobivamo napokon, da je ili

$${}^a log\, b = x = c + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \ldots + \frac{c^n}{10^n},$$

ili bilo n kako mu drago veliki broj,

$$c + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \ldots + \frac{c_n}{10^n} < x < c + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \ldots + \frac{c_n + 1}{10^n}.$$

U prvom je slučaju x racionalan broj, u drugom se slučaju može dogoditi, da se znamenke ili periodski vraćaju, što znači, da je x opet racionalan broj ili red znamenaka nije periodski, što znači, da je x iracionalan broj. U svakom slučaju postoji dakle jedan realan broj, koji udovoljava jednadžbi $a^x = b$ ($a > 1$, $b > 1$). Ako je ipak $0 < b < 1$, treba razmatrati niz a^0, a^{-1}, a^{-2}, . . . koji nas dovodi do istog rezultata.

Ako je $0 < a < 1$, treba jednadžbu $a^x = b$ napisati u obliku $\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{b}$. U toj jednadžbi jest $\frac{1}{a} > 1$, pa je za nju dokazana egzistencija broja x, koji joj udovoljava. Isto vrijedi onda i za jednadžbu $a^x = b$.

Za ${}^a log\, b$ postoji samo jedna jedina realna vrijednost; jer kad bi bilo ${}^a log\, b = m$, ${}^a log\, b = n$, moralo bi biti $b = a^m$, $b = a^n$ t. j. $a^m = a^n$. Ta jednadžba može uz $a \gtrless 1$ vrijediti samo onda, kad je $m = n$.

Logaritmi negativnih brojeva za pozitivnu bazu nisu realni. To izlazi odatle, što je ne samo $a^x > 0$, već je i $a^{-x} > 0$, kad je x realan broj. Dakle nema realnog broja x, s kojim bismo mogli potencirati broj a ($a > 0$), da nam izađe negativni broj $- b$.

§ 21. Poučci za računanje s logaritmima. Iz činjenice da svakom realnom pozitivnom broju odgovara jedan jedini realni logaritam kao i iz poučka o potenciranju jednadžbi i nejednadžbi izlaze za pozitivne baze različne od 1 ova dva poučka:

1. *Jednakim brojevima pripadaju uz istu bazu jednaki logaritmi i obrnuto.*

2. *Većem broju pripada uz istu bazu veći odnosno manji logaritam prema tomu da li je ta baza veća ili manja od* 1.

Bilješka. Već prema tomu da li je $b \gtrless 1$, a $a > 1$ bit će i ${}^a log\, b \gtrless {}^a log\, 1$ t. j. ${}^a log\, b \gtrless 0$, što znači, da je uz bazu veću od 1 logaritam broja većeg od 1 pozitivan, logaritam broja manjeg od 1 negativan.

3. *Logaritam produkta jednak je zbroju logaritama pojedinih faktora.*

Neka su zadani brojevi m i n, pa treba odrediti, koliko je ${}^a log\, (mn)$. Stavimo ${}^a log\, m = \alpha$, ${}^a log\, n = \beta$. Tad je $m = a^\alpha$, $n = a^\beta$ i $mn = a^{\alpha+\beta}$. Zato je ${}^a log\, (mn) = \alpha + \beta = {}^a log\, m + {}^a log\, n$. Slično se dokazuje, da je ${}^a log\, (mnp) = {}^a log\, m + {}^a log\, n + {}^a log\, p$ i t. d.

Primjeri: $log\, 15 = log\, 3 + log\, 5$; $log\, 105 = log\, 3 + log\, 5 + log\, 7$ $log\, (m^2 - n^2) = log\, (m + n) + log\, (m - n)$.

Kratkoće radi nije baza u tim primjerima naznačena.

4. *Logaritam kvocijenta (razlomka) jednak je razlici logaritama dividenda (brojnika) i divizora (nazivnika).*

Neka je opet $m = a^\alpha$, $n = a^\beta$; tad je $\frac{m}{n} = a^{\alpha-\beta}$ i ${}^a log \left(\frac{m}{n}\right) = \alpha - \beta = {}^a log\, m - {}^a log\, n$.

Primjeri: $log\, 5 = log \frac{10}{2} = log\, 10 - log\, 2$; $log\left(\frac{mn}{pq}\right) = log\, (mn) - log\, (pq) = log\, m + log\, n - log\, p - log\, q$.

5. *Logaritam potencije jednak je eksponentu potencije pomnoženu s logaritmom baze.*

Iz $m = a^\alpha$ izlazi, ako obje strane te jednadžbe potenciramo s n, $m^n = a^{\alpha n}$; zato je ${}^a log\, (m^n) = \alpha n = n\alpha = n \cdot {}^a log\, m$.

Primjeri. $log\, 16 = log\, 2^4 = 4\, log\, 2$; $log\, 144 = log\, (2^4 \cdot 3^2) = log\, (2^4) + log\, (3^2) = 4\, log\, 2 + 2\, log\, 3$.

6. *Logaritam korijena jednak je recipročnoj vrijednosti eksponenta korijena pomnoženoj s logaritmom radikanda.*

Iz $a^\alpha = m$ izlazi $a^{\frac{\alpha}{n}} = m^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{m}$. Zato je ${}^a log \sqrt[n]{m} = \frac{\alpha}{n} = \frac{1}{n}\, {}^a log\, m$.

Primjeri. $log \sqrt{15} = \frac{1}{2}\, log\, 15 = \frac{1}{2}(log\, 3 + log\, 5)$;

$$log \sqrt[5]{\frac{m^3 n^4}{p^2}} = \frac{1}{5}\, log \left(\frac{m^3 n^4}{p^2}\right) = \frac{1}{5}\, [3\, log\, m + 4\, log\, n - 2\, log\, p].$$

§. 22 Logaritamski sistemi. Skup logaritama svih brojeva za istu bazu zovemo *logaritamskim sistemom*. Kako baza logaritma može biti bilo koji pozitivni broj različit od 1, moguć je neograničeni broj logaritamskih sistema. Ipak se od svih mogućih logaritamskih sistema upotrebljavaju samo dva i to *obični, dekadski* ili *Briggsov* logaritamski sistem, kome je baza 10 i *prirodni* ili *Napier-ov* logaritamski sistem, kome je baza broj $e = 2{,}7182818284 \ldots$

*

Taj je broj granica izraza $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, kad n beskonačno raste. Dekadski se logaritmi označuju naprosto s *log*, te se upotrebljavaju kod praktičnog računanja, dok se prirodni logaritmi označuju obično s *l*, te se primjenjuju u višoj matematici.

Za bazu logaritma ne bi bilo zgodno uzeti pravi razlomak, jer bi logaritmi cijelih brojeva i nepravih razlomaka bili negativni, pravih razlomaka pozitivni; nadalje bi većem broju odgovarao manji logaritam.

Negativni se broj ne može uzeti za bazu logaritma, jer onda logaritmi mnogih brojeva ne bi bili realni. Tako bi na pr. bilo ${}^{-10}\log\ 100 = 2$, ${}^{-10}\log\ 10000 = 4$, dok na pr. ${}^{-10}\log\ 1000$ nema uopće realne vrijednosti.

§ 23. **Dekadski logaritmi.** Buduci da je $1 = 10^0$, $10 = 10^1$, $100 = 10^2$, $1000 = 10^3$, i t. d.; $0{\cdot}1 = 10^{-1}$, $0{\cdot}01 = 10^{-2}$, $0{\cdot}001 = 10^{-3}$ i t. d. to je $\log 1 = 0$, $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2$, $\log 1000 = 3$; $\log 0{\cdot}1 = -1$, $\log 0{\cdot}01 = -2$, $\log 0{\cdot}001 = -3$ i t. d. Odatle izlazi:

Dekadski logaritmi cijelih pozitivnih potencija od 10 jesu cijeli pozitivni brojevi, dekadski logaritmi cijelih negativnih potencija od 10 jesu cijeli negativni brojevi.

Ako je sada x racionalan broj, koji nije dekadska jedinica, pa je sadržan između 10^n i 10^{n+1} t. j. $10^n < x < 10^{n+1}$, onda je $n < \log x < n + 1$. Logaritam broja x leži dakle između dva susjedna cijela broja n i $n + 1$. Kad bi $\log x$ bio oblika $n + \frac{p}{q}$ t. j. jednak nekom mješovitom broju, moralo biti:

$$x = 10^{n + \frac{p}{q}} \cdot 10^{\frac{nq+p}{q}} = 10^{\frac{r}{q}}\ (r \text{ cio broj}).$$

Iz te posljednje jednadžbe izlazilo bi, da je $10^r = x^q$. To je opet nemoguće, jer nijedna cijela potencija od x, koje samo nije jednako nijednoj potenciji od 10, ne može potenciranjem dati koju cijelu potenciju od 10. Možemo dakle izreći ovaj poučak:

Dekadski logaritmi pozitivnih racionalnih brojeva, koji nisu potencije od 10, nisu racionalni već su iracionalni brojevi.

Budući da je $\log 1 = 0$, $\log 10 = 1$, a dekadski logaritmi rastu zajedno s brojevima, to se iracionalni brojevi, koji su logaritmi brojeva cijelih i decimalnih između 1 i 10 moraju nalaziti između 0 i 1. Kod praktičnih računa uzima se ponajčešće samo 4 ili 5, katkada i više decimala tih iracionalnih brojeva. Tako na pr. pišemo $\log 2 = 0{\cdot}3010$, $\log 2 = 0{\cdot}30103$. $\log 2 = 0{\cdot}301030$.

Mi ćemo računati s logaritmima na 5 decimalnih mjesta.

Kako je $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2$, a dekadski logaritmi rastu zajedno s brojevima, to će se logaritmi svih brojeva između 10 i 100 sastojati od jednog cijelog i jednog pravog decimalnog razlomka. Slično će se logaritmi svih brojeva između 100 i 1000 sastojati od 2 cijela i jednog pravog decimalnog razlomka i t. d. Tako je na pr.

$$\log 45 = 1{\cdot}65321;\quad \log 356 = 2{\cdot}55145;$$
$$\log 487{\cdot}5 = 2{\cdot}68797;\quad \log 5673{\cdot}5 = 3{\cdot}75385.$$

Cijeli broj, od koga se logaritam nekog broja sastoji, zove se *karakteristika*, dok se pravi decimalni razlomak zove *mantisa*. Iz gornjeg se razabira:

Karakteristika jest za 1 manja od broja cijelih mjesta nekog broja.

Ima li dakle neki broj n cijelih mjesta, njegova je karakteristika $n - 1$; ako je karakteristika logaritma n, broj imade $n + 1$ cijelih mjesta.

Budući da je $\log 0{\cdot}8 = \log \frac{8}{10} = \log 8 - \log 10 = 0{\cdot}90309 - 1$, $\log 0{\cdot}085 = \log \frac{8{\cdot}5}{100} = \log 8{\cdot}5 - \log 100 = 0{\cdot}92942 - 2$, $\log 0{\cdot}00856 = \log \frac{8{\cdot}56}{1000} = \log 8{\cdot}56 - \log 1000 = 0{\cdot}93247 - 3$, i t. d., to izlazi:

Karakteristika logaritma pravog decimalnog razlomka sastoji se od toliko negativnih jedinica, koliko imade decimalni razlomak pred prvom znamenkom, koja vrijedi, nula računajući i nulu pred decimalnom točkom.

Oba poučka mogu se posve općeno ovako dokazati. Ako je n broj znamenaka nekog broja x, tad je $10^{n-1} \leq x < 10^n$. Zato je $n - 1 \leq \log x < n$ t. j. logaritam se tog broja nalazi između $n - 1$ i n ili $\log x = n - 1 + \alpha$, gdje je α pravi dec. razlomak. Ako pak broj x imade pred prvom znamenkom, koja vrijedi n nula, to je $10^{-n} \leq x < 10^{-n+1}$ i odatle $-n \leq \log x < -n + 1$. Dakle se logaritam broja x nalazi između $-n$ i $-n + 1$ t. j. $\log x = -n + \alpha$.

Brojevi, koji se sastoje od istih znamenaka u istom redu, a razlikuju se samo po položaju decimalne točke, imadu istu mantisu.

Kako je na pr. $\log 2{\cdot}556 = 0{\cdot}40756$, to je $\log 25{\cdot}56 = \log (2{\cdot}556 \cdot 10) = \log 2{\cdot}556 + 1 = 1{\cdot}40756$; $\log 0{\cdot}0256 = \log \frac{2{\cdot}556}{100} = \log 2{\cdot}556 - \log 100 = 0{\cdot}40756 - 2$ i t. d.

Bilješka. Negativne logaritme treba prema formuli $-a = (b - a) - b$ predočiti u obliku razlike, gdje je minuend pravi pozitivni decimalni razlomak, a suptrahend cio broj. Na pr. $\log x = \overset{+3}{-}\ 2{\cdot}54863 \overset{-3}{=} 0{\cdot}45137 - 3$; -3 jest karakteristika, a $0{\cdot}45137$ matisa. Katkada se mjesto $0{\cdot}45137 - 3$ piše kraće $\overline{3}{\cdot}45137$.

§ 24. Longova metoda za određivanje dekadskih logaritama. Izračunavanje dekadskih logaritama prostih brojeva vrlo je mučan posao. Postoji više elementarnih metoda, s pomoću kojih se taki logaritmi mogu izračunati, a od svih tih metoda najjednostavnija je Longova metoda, koju ćemo ovdje prikazati.

Longova se metoda sastoji se u tom, da se zadani broj A napiše u obliku $A = 10^{\alpha} \cdot 10^{\frac{\alpha_1}{2}} \cdot 10^{\frac{\alpha_2}{2^2}} \cdot 10^{\frac{\alpha_3}{2^3}} \ldots$ gdje $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ znači 1 ili 0. Uspije li A napisati u tom obliku, tad je $\log A = \alpha + \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \frac{\alpha_3}{2^3} + \ldots$

Da se broj A uzmogne svesti na gornji oblik, treba postepenim vađenjem drugog korijena izračunati vrijednost potencija $10^{\frac{1}{2}}$ ili $10^{0·5}$, $10^{\frac{1}{4}}$ ili $10^{0·25}$, $10^{\frac{1}{8}}$ ili $10^{0·125}$ . . ., pa ih pregledno napisati ovako:

$10^{0·5}$	= 3·162278	$10^{0·000488}$	= 1·001125
$10^{0·25}$	= 1·778279	$10^{0·000244}$	= 1·000562
$10^{0·125}$	= 1·333521	$10^{0·000122}$	= 1·000281
$10^{0·0625}$	= 1·154782	$10^{0·000061}$	= 1·000141
$10^{0·03125}$	= 1·074608	$10^{0·000031}$	= 1·000070
$10^{0·015625}$	= 1·036633	$10^{0·000015}$	= 1·000035
$10^{0·007813}$	= 1·018152	$10^{0·000008}$	= 1·000018
$10^{0·003906}$	= 1·009035	$10^{0·000004}$	= 1·000009
$10^{0·001953}$	= 1·004507	$10^{0·000002}$	= 1·000004
$10^{0·000976}$	= 1·002251	$10^{0·000001}$	= 1·000002

S pomoću te tabele izračunat će se logaritam broja, koji leži između 1 i 10, na pr. *log* 1·9 na taj način;

Zadani broj 1·9 podijelit će se naprije s najbližim manjim brojem gornje tabele t. j. s 1·778279; dobiveni kvocijent 1·068562 opet s njemu najbližim manjim brojem te tabele t. j. s 1·036633 i t. d. i t. d. Onda je 1·9 jednako produktu svih divizora, koji idu jedan za drugim i posljednjeg kvocijenta, koji se može zanemariti. Radeći tako dobivamo:

1·9 = 1·778279 · 1·036633 · 1·018152 · 1·009035 · 1·002251 · 1·000562 · · 1·000281 · 1·000141 · 1·000009 · 1·000004 · 1·000002. Zato je *log* 1·9 = 0·25 + 0·015625 + 0·007813 + 0·003906 + 0·000976 + + 0·000244 + 0·000122 + 0·000061 + 0·000004 + 0·000002 + + 0·000001 = 0·27875|4 . . . (na 5 decimala točno).

Druge elementarne metode, s pomoću kojih se mogu izračunati dekadskih logaritmi, još su nezgodnije od Longove, jer zahtijevaju dugotrajno i mučno računanje. Mnogo laglje i brže izračunavaju se logaritmi s pomoću metoda više matematike.

§ 25. Uređaj logaritamskih tablica. Logaritamske tablice s 5 mjesta sadržavaju logaritme svih četveroznamenkastih brojeva. Ponajviše se nalaze u prvom stupcu označenom s N prve tri znamenke numerusa, a četvrta se nalazi na početku pojedinih vertikalnih stupaca. Mantisa je rastavljena u 2 dijela: prve dvije znamenke nalaze se na početku drugog stupca; tri slijedeće znamenke nalaze se u vertikalnim stupcima ispod četvrtih znamenaka numerusa. Na pr.

N	L.	0	1	2	3	4	5	6	8	8	9	P. P.
370	56	820	$\underline{832}$	$\underline{844}$	855	867	$\underline{879}$	$\underline{891}$	902	$\underline{914}$	$\underline{926}$	
371		937	949	$\underline{961}$	972	984	$\underline{996}$	*$\underline{008}$	*019	*$\underline{031}$	*$\underline{043}$	
372	57	054	$\underline{066}$	$\underline{078}$	089	$\underline{101}$	$\underline{113}$	124	$\underline{136}$	$\underline{148}$	159	
373		$\underline{171}$	$\underline{183}$	194	$\underline{206}$	217	229	$\underline{241}$	252	$\underline{264}$	$\underline{276}$	12
374		287	$\underline{299}$	310	$\underline{322}$	$\underline{334}$	345	$\underline{357}$	368	$\underline{380}$	$\underline{392}$	1 │ 1·2 2 │ 2·4 3 │ 3·6 4 │ 4·8 5 │ 6·0 6 │ 7·2 8 │ 8·4 8 │ 9·0 9 │ 10·8
375		403	$\underline{415}$	426	$\underline{438}$	449	$\underline{461}$	$\underline{473}$	484	$\underline{496}$	507	
376		$\underline{519}$	530	$\underline{542}$	553	$\underline{565}$	576	588	$\underline{600}$	611	$\underline{623}$	
377		634	$\underline{646}$	657	$\underline{669}$	$\underline{680}$	$\underline{692}$	703	$\underline{715}$	726	$\underline{738}$	
378		749	$\underline{761}$	772	$\underline{784}$	795	$\underline{807}$	818	$\underline{830}$	$\underline{841}$	852	
379		$\underline{864}$	875	$\underline{887}$	898	910	921	$\underline{933}$	944	955	$\underline{967}$	

Tako je *log* 3746 = 3·57357; *log* 0·003736 = 0·57241 — 3.

Prve dvije znamenke mantisa treba uzeti na početku drugog stupca; jedino, ako se ispred posljednje tri znamenke mantise nalazi zvijezdica, imaju se prve dvije znamenke mantise uzeti iz najbližeg slijedećeg retka.

Na pr. *log* 3·717 = 0·57019.

Posljednja znamenka nekih mantisa označena je malenim potezom; to znači, da je ona povišena za jednu jedinicu, jer je šesta decimala, koja je odbačena, bila 5 ili veća od 5.

Ima li se s pomoću tablica na 5 decimala odrediti logaritam peteroznamenkastog broja, treba primijeniti kratak račun, koji se zove interpolacija.

Neka se na pr. odredi *log* 3734·5. U tablicama nalazimo: *log* 3734 = 3·57217; *log* 3735 = 3·57229. Dalje zaključujemo: naraste li zadani broj za 1, decimalni dio njegova logaritma naraste za 12 stotisućina; naraste li zadani broj za 0·1, decimalni će njegov dio

narasti za $\frac{12}{10}$ stotisućina; a ako zadani broj naraste za 0·5, decimalni će dio narasti za $\frac{5 \cdot 12}{10} = 6$ stotisućina ili za 0·00006. Prema tome jest *log* 3734·5 3·57217 + 0·00006 = 3·57223.

Budući da mantisa u logaritmu nekog broja ne zavisi o položaju decimalne točke, to se uvijek može pretpostaviti, da se zadani broj, kao u predašnjem primjeru, svršava s desetinama. Zato je *log* 37·104 = $= 1·56937 + \frac{4 \cdot 12}{10} \cdot 10^{-5} = 1·56937 + 4·8 \cdot 10^{-5} = 1·56937 +$ $+ 0·00005 = 1·56942$.

U tablicama je pod stupcem *P. P. (partes proportionales)* naznačena razlika između dvije susjedne mantise, a ujedno je izveden i čitav račun za određivanje korekture za peto mjesto numerusa.

Slično se postupa, kad treba odrediti logaritam šesteroznamenkasta broja. Neka se na pr. odredi *log* 3726·69. U tablicama nalazimo *log* 3726 = 3·57124, *log* 3727 = 3·57136. Naraste li broj za 1, logaritam naraste za 12 stotisućina. Naraste li broj za $\frac{69}{100}$, njegov će logaritam narasti za $\frac{12 \cdot 69}{100} = \frac{828}{100} = 8·28$ stotisućina. Zato je *log* 3726·69 = 3·57124 + 0·00008 = 3·57132.

S pomoću računa sa strane može se taj logaritam brže odrediti ovako: za petu znamenku 6 nalazimo pod *P. P.* 7·2, a za šestu 9 (treba uzeti samo deseti dio korekture, koju bi trebalo uzeti, da je ta znamenka na petom mjestu) 1·08. Ukupna je dakle korektura 8. Zato je *log* 3726·69 = 3·57124 + 0·00008 = 3·57132.

Interpolacija logaritama osniva se na pretpostavci, da su promjene logaritma upravno razmjerne s promjenama samoga broja, ako su promjene broja vrlo malene prema broju samom. Točna istraživanja pokazuju, da ta pretpostavka vrijedi samo aproksimativno, ali da pogrješka, koja odatle potječe, nije tolika, da bi mogla utjecati na peto decimalno mjesto logaritma.

Obrnuto se može s pomoću logaritamskih tablica zadanom logaritmu odrediti pripadni numerus. To se može neposredno učiniti, ako se mantisa zadanog logaritma nalazi u tablicama. Na pr. *log x* = 0·57484 — 2. Nalazimo *x* = 0·03757. (Najprije se napišu znamenke numerusa, a onda se iz zadane karakteristike odredi broj cijelih mjesta). Ne nalazi li se mantisa točno u tablicama, treba uzeti numerus, koji pripada najbližoj nižoj mantisi, a slijedeća (peta) njegova znamenka određuje se interpolacijom. Neka se na pr. odredi broj, komu je logaritam jednak 3·57270. U tablicama nalazimo *log* 3738 = = 3·57264, *log* 3739 = 3·57276. Kako je razlika između 3·57270 i 3·57264 6 stotisućina, a tablična razlika 12 stotisućina, zaključujemo ovako:

Ako mantisa naraste za 12 stotisućina, numerus naraste za 1,

„ „ „ „ 1 stotisućinu „ „ „ $\frac{1}{12}$,

„ „ „ „ 6 stotisućina, „ „ „ $\frac{6}{12} = 0·5$.

Dakle traženi broj jednak 3738·5.

Ne nalazi li se dakle u tablicama zadana mantisa, potražit će se njoj najbliža niža mantisa, koja se nalazi u tablicama i napisati pripadni numerus. Zatim će se odrediti razlika *d* između zadane i te najbliže mantise i ta razlika podijeliti tabličnom razlikom. Dobiveni kvocijent pripisat će se numerusu, koji pripada nižoj mantisi. Tako se mogu odrediti jedna ili najviše dvije dalnje znamenke numerusa.

Taj se kvocijent može odrediti i iz tablice *P. P.*, ako se u njoj desno od poteza potraži razlika *d*. Ako se ta razlika nađe potpuno, broj lijevo od poteza jest traženi kvocijent. Ne nađe li se razlika *d* potpuno u tablici pod *P. P.*, uzet će se bliži manji iznos *d'*, a lijevo pripadna znamenka jest prva znamenka traženog kvocijenta. Razlika između *d* i *d'* pomnoži se sa 10, pa se taj umnožak opet potraži u tablici pod *P. P.* Tu će on biti ili potpuno sadržan ili će se sad uzeti iznos, koji mu je najbliži. Time se dobije druga znamenka traženog kvocijenta. Neka se na pr. odredi broj, komu je logaritam 3·57371. U tablicama nalazimo *log* 3747 = 3·57368; *d* = 3. Najbliži niži iznos u tablicama ispod *P. P.* jest 2·4, njemu pripada broj 2, koji je peta znamenka traženog numerusa. Hoćemo li šestu znamenku numerusa, treba načiniti razliku 3 — 2,4, tu razliku pomnožiti s 10 i tom produktu potražiti pripadni broj nalijevo u tablici ispod *P. P.* Kako je (3 — 2·4) · 10 = 6, bit će šesta znamenka traženog numerusa 5. Zato je traženi broj 3747·25.

§ 26. Računske operacije s dekadskim logaritmima.

Za računanje s dekadskim logaritmima vrijede ista pravila kao i za računanje s decimalnim razlomcima; ipak treba kod pojedinih računskih operacija imati na umu ovo:

1. *Zbrajanje.* Izlaze li kod zbrajanja dekadskih logaritama 2 karakteristike i to jedna pozitivna, a druga negativna, one se imadu stegnuti u jednu. Na pr.

2·45864 + 3·32512 + 0·33448 — 3 + 0·55628 — 4 = 6·67452 — 7 =
= 0·67452 — 1.

2. *Odbijanje.* Ako je minuend manji od suptrahenda, treba u minuendu dodati toliko pozitivnih jedinica, da on postane veći od sup-

trahenda, a zatim isto toliko jedinica oduzeti. Inače bismo dobili u razlici negativnu mantisu. Na pr.

$$\begin{array}{r} +4 \qquad -4 \\ 1{\cdot}56435 \qquad \\ -\,4{\cdot}72426 \qquad \\ \hline 0{\cdot}84009\ -\ 4 \end{array}$$

3. *Množenje.* Treba li pomnožiti logaritam s negativnim karakteristikom cijelim nekim brojem, treba u produktu stegnuti novu negativnu karakteristiku s pozitivnom, ako je produkt sadržava. Na pr.

$$(0{\cdot}42315 - 1)\cdot 5 = 2{\cdot}21575 - 5 = 0{\cdot}21575 - 3.$$

4. *Dijeljenje.* Ima li se podijeliti logaritam s negativnom karakteristikom cijelim brojem, treba karakteristiku, ako ona nije djeljiva tim brojem, umanjiti za toliko jedinica, da ona postane tim brojem djeljiva, ali za isto toliko treba uvećati mantisu. Na pr.

$$(0{\cdot}56428 - 3) : 4 = (1{\cdot}56428 - 4) : 4 = 0{\cdot}39107 - 1.$$

§ 27. **Kologaritmi.** Kologaritam nekog broja jest logaritam recipročne vrijednosti tog broja. Kologaritam od a jest po definiciji $log\,\frac{1}{a}$; kako je $log\,\frac{1}{a} = -\,log\,a$, to je $kolog\,a = -\,log\,a$.

Neka je k karakteristika i m mantisa broja a; onda je $log\,a = k + m$; po definiciji kologaritma jest kolog $a = -k - m$ ili kolog $a = -(k+1) + (1-m)$.

Odatle se razabira, da se kologaritam nekog broja, ako je poznat njegov logaritam, dobije tako, da se karakteristici logaritma doda 1, promijeni znak dobivene sume i mantisa logaritma odbije od 1.

Primjeri. 1) Neka se odredi *kolog* 2. Kako je *log* 2 = 0·30103, to je *kolog* 2 = 0·69897 — 1.

2. Neka se odredi *kolog* 256. Kako je *log* 256 = 2·40824, to je *kolog* 256 = 0·59176 — 3.

3. Neka se odredi *kolog* 0·00625. Kako je *log* 0·00625 = 0·79588—3, to je *kolog* 0·00625 = 2·20412.

S pomoću kologaritama može se suptrakcija logaritama svesti na adiciju. Ako na pr. treba izračunati izraz $x = \frac{abc}{def}$, to je $log\,x = log\,a + log\,b + log\,c + kolog\,d + kolog\,e + kolog\,f$.

Računi, koji su potrebni, da se izračunaju kologaritmi, vrlo su jednostavni, pa je računanje s kologaritmima vrlo zgodno.

§ 28. **Primjene dekadskih logaritama za izvođenje numeričkih računa.** S pomoću logaritama odnosno kologaritama numeričko se računanje može znatno pojednostaviti, jer se pomoću njih može svaka multiplikacija i divizija svesti na adiciju, svako potenciranje na multiplikaciju i svako radiciranje na diviziju.

Primjeri. 1) Neka se odredi $x = \frac{236{\cdot}392 \cdot 127{\cdot}46}{564{\cdot}87}$

Imamo:

$$\begin{array}{rl} log\ 236{\cdot}392 &= 2{\cdot}37363 \\ log\ 127{\cdot}46 &= 2{\cdot}10537 \\ kolog\ 564{\cdot}87 &= 0{\cdot}24805 - 3 \\ \hline log\ x &= 4{\cdot}72705 - 3 \\ &= 1{\cdot}72705 \\ x &= 53{\cdot}34 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} log\ 564{\cdot}87 &= 2{\cdot}75195 \\ kolog\ 564{\cdot}87 &= 0{\cdot}24805 - 3 \end{array}$$

2) Neka se odredi $x = \frac{0{\cdot}245317^5 \cdot \sqrt{56{,}26}}{3{\cdot}1416}$

$$log\ x = 5\ log\ 0{\cdot}245317 + \frac{1}{2}\ log\ 56{\cdot}26 + kolog\ 3{\cdot}1416$$

$$\begin{array}{rl} log\ 0{\cdot}245317^5 &= 0{\cdot}94865 - 4 \\ log\ \sqrt{56{\cdot}26} &= 0{\cdot}87510 \\ kolog\ 3{\cdot}1416 &= 0{\cdot}50285 - 1 \\ \hline log\ x &= 0{\cdot}32660 - 3 \\ x &= 0{\cdot}0021213 \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{rl} log\,0{\cdot}245317 &= 0{\cdot}38973 - 1 \\ 5 \cdot log\,0{\cdot}245317 &= 1{\cdot}94865 - 5 = \\ &= 0{\cdot}94865 - 4 \\ log\,56{\cdot}26 &= 1{\cdot}75020 \\ \frac{1}{2}\ log\,56{\cdot}26 &= 0{\cdot}87510 \\ kolog\,3{\cdot}1416 &= 0{\cdot}50285 - 1 \end{array}$$

3) Neka se odredi $x = \sqrt[5]{\frac{35\sqrt[3]{0{\cdot}5} + \sqrt[4]{0{\cdot}9}}{0{\cdot}8732 \cdot 0{\cdot}048}}$

Budući da je izraz u brojniku radikanda zbroj, to treba ponajprije izračunati svaki pribrojnik napose, a onda će se tek moći izračunati x neprekidnim logaritmiranjem. Stavimo:

$$\begin{array}{rl} y &= 35\sqrt[3]{0{\cdot}5}, \\ log\ 0{\cdot}5 &= 0{\cdot}69897 - 1 \\ \frac{1}{3}\ log\ 0{\cdot}5 &= \overset{+2}{0}{\cdot}69897 - \overset{-2}{1} \\ &= 0{\cdot}89966 - 1 \\ log\ 35 &= 1{\cdot}54407 \quad \}+ \\ \hline log\ y &= 1{\cdot}44373 \\ y &= 27{\cdot}78 \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{rl} z &= \sqrt[4]{0{\cdot}9} \\ log\ 0{\cdot}9 &= 0{\cdot}95424 - 1 \\ \frac{1}{4}\ log\ 0{\cdot}9 &= \overset{+3}{0}{\cdot}95424 - \overset{-3}{1} \\ &= 0{\cdot}98856 - 1 \\ z &= 0{\cdot}9740. \end{array}$$

Kako je $y + z = 28{\cdot}754$, to je $x = \sqrt[5]{\dfrac{28{\cdot}754}{0{\cdot}8732 \cdot 0{\cdot}048}}$ i

$$log\, x = \frac{1}{5}\,[log\, 28{\cdot}754 + kolog\, 0{\cdot}8732 + kolog\, 0{\cdot}048]$$

$$\begin{array}{lcl} log\ 28{\cdot}754 & = & 1{\cdot}45870 \\ kolog\ 0{\cdot}8732 & = & 0{\cdot}05889 \\ kolog\ 0{\cdot}048 & = & 1{\cdot}31876 \\ \hline 5\ log\ x & = & 2{\cdot}83635 \\ log\ x & = & 0{\cdot}56727 \\ x & = & 3{\cdot}6921 \end{array}
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{array}{lcl} log\ 28{\cdot}754 & = & 1{\cdot}45870 \\ log\ 0{\cdot}8732 & = & 0{\cdot}94111 - 1 \\ kolog\ 0{\cdot}8732 & = & 0{\cdot}05889 \\ log\ 0{\cdot}048 & = & 0{\cdot}68124 - 2 \\ kolog\ 0{\cdot}048 & = & 1{\cdot}31876 \end{array}$$

Ima li se s pomoću logaritama izračunati izraz, koga je vrijednost negativna, treba izračunati logaritamski njegovu apsolutnu vrijednost i u rezultatu staviti znak minus.

Na pr. $\quad x = 3{\cdot}56 \cdot (-0{\cdot}48)^5$

$log\,(-x) = log\, 3{\cdot}56 + 5\, log\, 0{\cdot}48$ i t. d.

§ 29. Izračunavanje dekadskih logaritama s pomoću prirodnih i obrnuto. Neka je prirodni logaritam nekog broja a jednak α, dekadski logaritam istog broja a jednak β. T. j. $l a = \alpha$, $log\ a = \beta$. Tad je $$a = e^{\alpha},\ a = 10^{\beta}.$$

Logaritmiramo li prvu jednadžbu s obzirom na bazu 10, to je
$$log\ a = \alpha\ log\ e;$$
kako je $\alpha = l\, a$, bit će
$$log\ a = l\, a \cdot log\ e.$$
Stavimo li u ovu posljednju jednadžbu $a = 10$, imamo $1 = l\,10 \cdot log\, e$ ili $log\ e = \dfrac{1}{l\,10}$.

Zato možemo pisati:
$$log\ a = \frac{l\, a}{l\,10} \text{ i } l\, a = \frac{log\ a}{log\ e}.$$

S pomoću prve od tih formula mogu se izračunati dekadski logaritmi brojeva, kojima su poznati prirodni logaritmi, a s pomoću druge mogu se opet izračunati prirodni logaritmi, kad su dekadski poznati.

Broj $\dfrac{1}{l\,10} = 0{,}4342945\ldots$ zove se *modul* za prelaženje *iz prirodnih logaritama u dekadske*, a broj $\dfrac{1}{log\ e} = 2{\cdot}302585\ldots$ *modul* za prelaženje *iz dekadskih logaritama u prirodne.*

Zadaci. Izračunaj:

1. *a)* ${}^{6}log\,216$, *b)* ${}^{4}log\,64$, *c)* ${}^{3}log\,81$, *d)* ${}^{6}log\,36$, *e)* ${}^{1000}log\,100$.

2. *a)* za bazu 2 logaritme od 2, 4, 8, 16, 32, 64, 2^n.
b) za bazu 10 logaritme od 10, 100, 1000, 10000, 10^n.

3. *a)* ${}^{2}log\,128$, *b)* ${}^{4}log\,128$, *c)* ${}^{8}log\,128$, *d)* ${}^{16}log\,128$, *e)* ${}^{128}log\,128$.

4. *a)* ${}^{3}log\,729$, *b)* ${}^{9}log\,729$, *c)* ${}^{27}log\,729$, *d)* ${}^{81}log\,729$, *e)* ${}^{729}log\,729$.

5. *a)* ${}^{2}log\left(\frac{1}{16}\right)$, *b)* ${}^{4}log\left(\frac{1}{256}\right)$, *c)* ${}^{10}log\ 0{,}001$, *e)* ${}^{5}log\left(\frac{1}{625}\right)$.

6. *a)* ${}^{\frac{1}{3}}log\,81$, *b)* ${}^{\frac{3}{5}}log\,\frac{27}{125}$, *c)* ${}^{\frac{5}{3}}log\,\frac{81}{625}$, *d)* ${}^{3}log\,\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Izračunaj x iz:

7. *a)* ${}^{x}log\,125 = 3$, *b)* ${}^{x}log\,256 = 2$, *c)* ${}^{x}log\,128 = 7$,
d) ${}^{x}log\,49 = -2$.

8. *a)* ${}^{x}log\,\frac{32}{243} = 5$, *b)* ${}^{x}log\,\frac{121}{81} = 2$, *c)* ${}^{x}log\left(\frac{1}{27}\right) = -3$.

9. *a)* ${}^{2}log\,x = 3$, *b)* ${}^{4}log\,x = \frac{1}{2}$, *c)* ${}^{\frac{9}{16}}log\,x = \frac{1}{2}$.
d) ${}^{\frac{7}{2}}log\,x = -2$, *e)* ${}^{\frac{2}{3}}log\,x = -3$, *f)* ${}^{\frac{1}{4}}log\,x = -2$.

Između kojih se cijelih brojeva nalazi:

10. *a)* ${}^{2}log\,6$, *b)* ${}^{3}log\,75$, *c)* ${}^{4}log\,240$, *d)* ${}^{5}log\,500$?

Predoči ove logaritme kao algebarske zbrojeve logaritama jednostavnih izraza:

11. *a)* $log\,(a^2 bc)$, *b)* $log\,(a^3 b^2 c^4)$, *c)* $log\,\sqrt{a^3 b^5}$, *d)* $log\,(a^2 - b^2)^3$.

12. *a)* $log\,\frac{x^2 - y^2}{xy}$, *b)* $log\,\frac{a^3 b^2}{cd^4}$, *c)* $log\,\frac{a b^2 c^3}{d^4 e^5 f}$, *d)* $log\,\frac{(x^2 + y^2)^2}{(x + y)^3}$.

13. *a)* $log\,\frac{1}{\sqrt[4]{ab^2}}$, *b)* $log\,\frac{1}{a^2 \sqrt[3]{bc}}$, *c)* $log\,\sqrt[5]{\frac{a^2}{b^3 c^4}}$, *d)* $log\,[a^3 (b + c)^2]^4$.

14. *a)* $log\,\sqrt{\frac{x^3 \sqrt{2}}{4 \pi v}}$, *b)* $log\,\frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.
c) $log\,\sqrt[m]{a \sqrt[m]{b \sqrt[m]{c}}}$, *d)* $log\,2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$.

15. Neka se nađe izraz, komu se logaritam može napisati u obliku:
a) $log\ a - log\ b - log\ c$,
b) $3\ log\ a + 4\ log\ b - \frac{1}{2}\ log\ c$,
c) $7\ log\ a + 8\ log\ b - 6\ log\ c$,
d) $\frac{2}{3}\ log\ a + \frac{3}{4}\ log\ b + 10\ log\ c$.

16. $\frac{1}{2} \log a + \frac{1}{3} \log b - \frac{1}{4} \log c - \frac{1}{5} \log d.$

17. $3 \log (a + b) + \log (ab) + 2 \log (a - b) - 4 \log (a^2 - b^2).$

18. $3 \log (x + y) - \frac{1}{2} \log (x^2 + xy + y^2) - \frac{1}{2} \log (x - y).$

19. $\frac{1}{5} \log (a + b) - \frac{1}{5} \log (a - b).$

20. $\log a + \frac{1}{a} \left\{ \log a + \frac{1}{a} \left[\log a + \frac{1}{a} \left(\log a + \frac{1}{a} \log a \right) \right] \right\}.$

21. $\log (a-b) + 3 \log (a+b) + \frac{1}{3} \left[2 \log a - \log b + \frac{1}{2} (\log a - \log b) \right]$

22. $-3 \log x + 2 \log (x - y) - \log (x + y) + \frac{1}{2} [\log x - \log y].$

Zadan je $\log 2 = 0{\cdot}30103$; neka se izračuna:

23. *a)* $\log 5$, *b)* $\log 8$, *c)* $\log 20$, *d)* $\log 25$, *e)* $\log 200$, *f)* $\log \frac{1}{4}$, *g)* $\log \frac{1}{16}$, *h)* $\log \frac{1}{40}$, *i)* $\log \frac{1}{50}$.

Uz $\log 2$ poznat je $\log 3 = 0{\cdot}47712$; neka se izračuna:

24. *a)* $\log 6$, *b)* $\log 15$, *c)* $\log 24$, *d)* $\log 36$, *e)* $\log \frac{2}{3}$, *f)* $\log \frac{9}{4}$, *g)* $\log \frac{15}{16}$, *h)* $\log \frac{5}{24}$.

25. Iz $\log 2$ odnosno $\log 3$ izračunaj *a)* $\log \sqrt{5}$, *b)* $\log \sqrt{6}$, *c)* $\log \sqrt{12}$, *d)* $\log \sqrt{24}$, *e)* $\log \sqrt[3]{48}$, *f)* $\log \sqrt[3]{72}$, *g)* $\log \sqrt[5]{120}$.

Izračunaj s pomoću logaritamskih tablica:

26. *a)* $\log 7$, *b)* $\log 23$, *c)* $\log 47$, *d)* $\log 71{\cdot}3$.

Odredi s pomoću logaritamskih tablica:

27. *a)* $\log 56$, *b)* $\log 3584$, *c)* $\log 52{\cdot}42$, *d)* $\log 0{\cdot}009$, *e)* $\log 0{\cdot}7684$, *f)* $\log 999900$, *g)* $\log 0{\cdot}00075$, *h)* $\log 0{\cdot}0008754$.

28. *a)* $\log 8564300$, *b)* $\log 49{\cdot}548$, *c)* $\log 0{\cdot}72354$, *d)* $\log 0{\cdot}00876543$, *e)* $\log 0{\cdot}00987659$, *f)* $\log 10{\cdot}7004$, *g)* $\log 0{\cdot}00897949$, *h)* $\log 0{\cdot}00000123456$.

Izračunaj broj, komu je logaritam jednak:

29. *a)* 2·94111, *b)* 0·56820, *c)* 0·13033—1, *d)* 0·42226—4, *e)* 4·52479, *f)* 0·58625—2.

30. *a)* 0·59564, *b)* 2·69394, *c)* 3·71159, *d)* 0·74508—2, *e)* 0·46410—3, *f)* 0·13135, *g)* 0·15049, *h)* 5·18275, *i)* 0·28336—4.

31. *a)* — 0·14512, *b)* — 1·58422, *c)* — 2·56488, *d)* $\frac{1}{2}$ (0·42356—1), *e)* $\frac{1}{3}$ (0·72488—1), *f)* $\frac{2}{3}$ (0·45376—2), *g)* $\frac{3}{5}$ (0·56422 — 2).

32. Odredi kologaritme ovih brojeva: *a)* 3, *b)* 0·03, *c)* 0·25, *d)* 0·0025, *e)* 36, *f)* 54, *g)* 0·00258, *h)* 4·6285.

33. Tako isto ovih brojeva: *a)* 878·62, *b)* 9487·5, *c)* 0·006, *d)* 0·0285, *e)* 0·00007, *f)* 528·6, *g)* 4·0025, *h)* 0·000084623. *i)* π.

Izračunaj s pomoću logaritama:

34. *a)* $4{\cdot}5675 \cdot 12{\cdot}7893$, *b)* $56{\cdot}423 \cdot 0{\cdot}00048973 \cdot 0{\cdot}46$.

35. *a)* $5{\cdot}7436 : 0{\cdot}027894 \cdot 423{\cdot}875$; *b)* $0{\cdot}087664^2 : 0{\cdot}06397^3$.

36. $\frac{0{\cdot}578 \cdot 9{\cdot}6532 \cdot 0{\cdot}006845}{0{\cdot}00485 \cdot 237{\cdot}52 \cdot 4{\cdot}56}$, 37. $\frac{0{\cdot}0458^3 \cdot 5{\cdot}48^5}{0{\cdot}7564}$.

38. $\sqrt[3]{2{\cdot}5726^2}$. 39. $\sqrt[5]{0{\cdot}64237}$. 40. $\sqrt[7]{-0{\cdot}04685}$.

41. $\sqrt[4]{0{\cdot}0042^3}$, 42. $\sqrt[5]{7{\cdot}5748} \cdot \sqrt[3]{0{\cdot}00684} \cdot \sqrt{2754{\cdot}32}$.

43. $\frac{0{\cdot}058742^3 \cdot \sqrt[5]{0{\cdot}04586}}{24{\cdot}325^4}$. 44. $\frac{4{\cdot}5673^4 \cdot \sqrt[5]{0{\cdot}066354}}{\sqrt[3]{2{\cdot}874 \cdot \sqrt{0{\cdot}0069}}}$.

45. $\sqrt{\frac{0{\cdot}4876^4 \cdot \sqrt{96{\cdot}453} \cdot \sqrt[5]{4876{\cdot}53}}{0{\cdot}05734^5 \cdot \sqrt[7]{0{\cdot}042} \cdot \sqrt[4]{5{\cdot}234}}}$. 46. $\sqrt{0{\cdot}3 \sqrt[3]{0{\cdot}3 \sqrt{0{\cdot}3}}}$.

47. $\frac{1}{4} \sqrt{(a + b + c)\ (b + c - a)\ (a + b - c)\ (a - b + c)}$ za $a = 5{\cdot}6861$, $b = 4{\cdot}9243$, $c = 2{\cdot}8430 = ?$

48. $\sqrt{\frac{(a + b + c)\ (a + b - c)}{ab}}$ za $a = 51{\cdot}693$, $b = 61{\cdot}693$, $c = 68{\cdot}687 = ?$

49. $7^7 : \sqrt[7]{7 \sqrt[7]{7}}$. 50. $\sqrt{3 + \sqrt[4]{5}}$. 51. $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$.

52. $\sqrt[10]{10 \sqrt[10]{10 + \sqrt[10]{10}}}$. 53. $50000 \cdot 1{\cdot}08^{25} - 2000 \frac{1{\cdot}08^{25} - 1}{1{\cdot}08 - 1}$.

54. $\sqrt{423{\cdot}5^2 + 756{\cdot}3^2}$, 55. $\sqrt[7]{\sqrt[6]{2{\cdot}5} - \sqrt[5]{0{\cdot}4}}$.

56. $\sqrt{4{\cdot}5 \cdot 3{\cdot}567^3 + 5 \sqrt{0{\cdot}475}} - 0{\cdot}4736^3$.

57. $\dfrac{\log \log 3 - \log \log 2}{\log \log 6}$. 58. $\dfrac{\sqrt[5]{42{\cdot}38 \cdot \sqrt[3]{0{\cdot}5} - \sqrt[3]{0{\cdot}004} \cdot \sqrt[3]{5{\cdot}427}}}{15\sqrt{3} - 12\sqrt[3]{2}}$

59. $\sqrt{\dfrac{3729 \cdot 1{\cdot}032^{10} \cdot 0{\cdot}64853}{0{\cdot}0021 \cdot \sqrt[4]{7863}}}$. 60. $\dfrac{25\sqrt{47^3} \cdot \sqrt[5]{0{\cdot}000253}}{\sqrt[6]{0{\cdot}037}}$

61. $\dfrac{18{\cdot}326^2 \cdot \sqrt[3]{0{\cdot}3645}}{0{\cdot}0547 \cdot \sqrt{83{\cdot}6}}$. 62. $\dfrac{\sqrt[3]{31{\cdot}061} \cdot \sqrt[5]{21{\cdot}371} \cdot \sqrt[6]{7{\cdot}259}}{\sqrt[4]{0{\cdot}515} \cdot \sqrt[7]{0{\cdot}719} \cdot \sqrt[5]{0{\cdot}021}}$.

63. $\dfrac{\sqrt[3]{0{\cdot}047} \cdot 0{\cdot}038^4}{0{\cdot}0091^3 \cdot \sqrt{0{\cdot}0057}}$. 64. $\sqrt{\dfrac{4\sqrt{3}+\sqrt[3]{5}}{2\sqrt[6]{9}}}$.

§ 30. Grafičko predočivanje funkcija $y = 10^x$ i $y = \log x$.

Budući da su vrijednosti funkcije $y = 10^x$ osim za cjelobrojne vrijednosti od x iracionalne, to nam ne preostaje drugo nego da se kod grafičkog predočivanja te funkcije služimo približnim vrijednostima. Kako funkcija $y = 10^x$ vrlo na.lo raste (za $x = 0$, $y = 1$, za $x = 1$, $y = 10$, za $x = 2$, $y = 100$!), potražit ćemo vrijednosti funkcije za neke vrijednosti od x između 0 i 1. Uzet ćemo za x redom ove vrijednosti:

$$0, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{5}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, 1.$$

Izlazi $10^0 = 1$, $10^{\frac{1}{8}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}} = 1{\cdot}33\ldots$, $10^{\frac{2}{8}} = \sqrt{\sqrt{10}} = 1{\cdot}78\ldots$, $10^{\frac{3}{8}} = 2{\cdot}37\ldots$, $10^{\frac{4}{8}} = 3{\cdot}16\ldots$, $10^{\frac{5}{8}} = 4{\cdot}22\ldots$, $10^{\frac{6}{8}} = 5{\cdot}62\ldots$, $10^{\frac{7}{8}} = 7{\cdot}50\ldots$, osim toga jest $10^{-1} = \frac{1}{10}$, $10^{-\frac{1}{2}} = 0{\cdot}32\ldots$ Tako imamo ovaj niz pripadnih vrijednosti od x i y:

x	y
0	1
$\frac{1}{8}$	1·33
$\frac{2}{8}$	1·78
$\frac{3}{8}$	2·37
$\frac{4}{8}$	3·16
$\frac{5}{8}$	4·22
$\frac{6}{8}$	5 62
$\frac{7}{8}$	7·50
$\frac{8}{8}$	10
$-\frac{1}{2}$	0·32
-1	0·1

Spojimo li točke, koje su određene pripadnim vrijednostima od x i y, dobivamo krivulju $y = 10^x$ (sl. 3).

Za tok te krivulje vrijedi:

Kad x raste, $y = 10^x$ također raste, te postaje beskonačno veliko zajedno s x, ili $\lim 10^x = \infty$ za $x = \infty$.

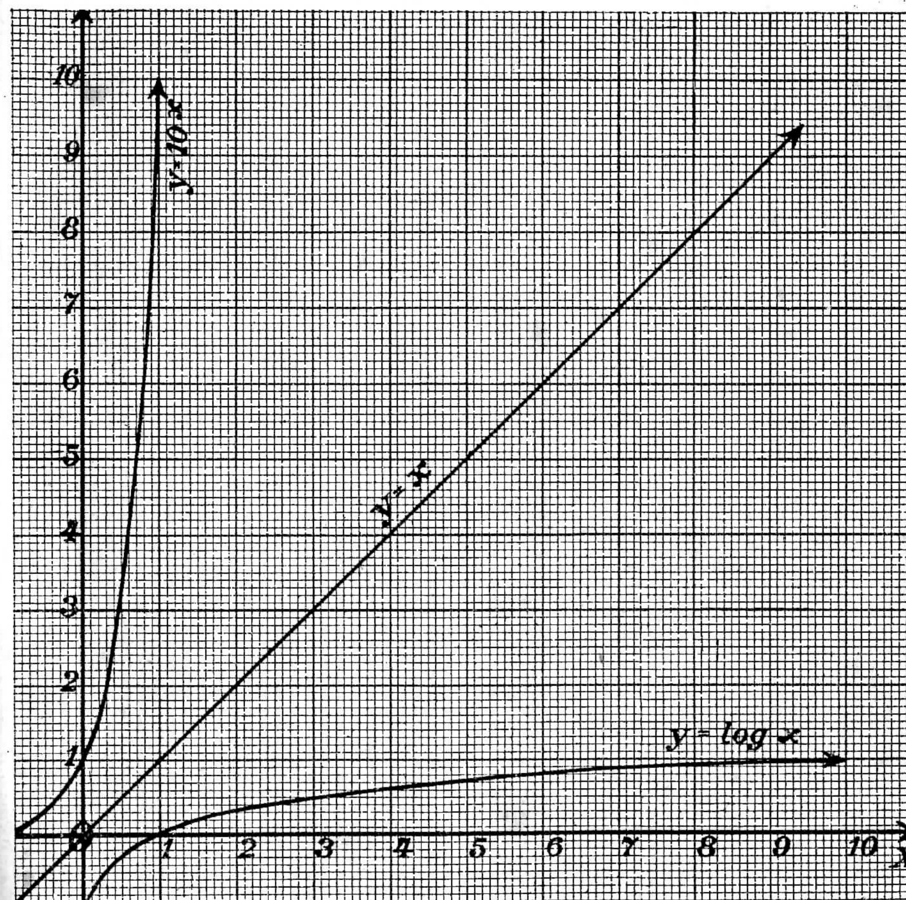
Kad x raste po aps. vrijednosti, ali ostaje trajno negativno, $y = 10^x$ umanjuje se, te se približava nuli kao granici.

Ili $\lim 10^x = 0$, $x - -\infty$.

Krivulja $y = \log x$ može se sad odmah nacrtati. Treba samo u pređašnjoj tabeli zamijeniti x i y među sobom

ili u slici pređašnje apscise nanijeti kao ordinate, pređašnje ordinate kao apscise. Tako dobivamo sliku funkcije $y = \log x$.

Još će se zgodnije nacrtati krivulja $y = \log x$ iz $y = 10^x$, da se krivulja $y = 10^x$ zakrene oko pravca $y = x$. S pomoću krivulje možemo (dakako približno) iz slike čitati logaritme brojeve 2, 3 4 . . .



Sl. 3

Razabiramo, da vrijednostima od x većim od 1 pripadaju pozitivni logaritmi, vrijednostima od x između 0 i 1 negativni logaritmi. Ako x raste i njegov logaritam raste. Zu $x = 0$, $\log x = -\infty$. Za negativne vrijednosti od x nema pripadnih ordinata, što znači, da za takove vrijednosti od x nema realnih logaritama. Ujedno se razabira, ako x naraste za malene vrijednosti, da su promjene logaritma proporcionalne s promjenama broja.

CIJENA D 18.—

OVA SE KNJIGA NE SMIJE PRODAVATI SKUPLJE NI JEFTINIJE OD OZNAČENE CIJENE.

524